

A10 (повышенный уровень, время – 2 мин)

Тема: Основные понятия математической логики.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике (\wedge, \vee, \neg), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает \wedge и \vee . Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек (\wedge, \vee, \neg), что еще раз подчеркивает проблему. Далее во всех решениях приводятся два варианта записи.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$ не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B, A \cdot B$ A и B (логическое умножение, конъюнкция)

$A \vee B, A + B$ A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$ импликация (следование)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ или в других обозначениях $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- иногда полезны формулы де Моргана¹:

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Пример задания:

Какое из приведённых имен удовлетворяет логическому условию:

(первая буква согласная \rightarrow вторая буква согласная) \wedge (предпоследняя буква гласная \rightarrow последняя буква гласная)?

1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение:

- 1) два условия связаны с помощью операции \wedge («И»), поэтому должны выполняться одновременно
- 2) импликация ложна, если ее первая часть («посылка») истинна, а вторая («следствие») – ложна
- 3) первое условие «первая буква согласная \rightarrow вторая буква согласная» ложно тогда, когда первая буква согласная, а вторая – гласная, то есть для ответов 2 и 4
- 4) второе условие «предпоследняя буква гласная \rightarrow последняя буква гласная» ложно тогда, когда предпоследняя буква гласная, а последняя – согласная, то есть, для ответа 3

¹ Огастес (Август) де Морган – шотландский математик и логик.

- 5) таким образом, для варианта 1 (КРИСТИНА) оба промежуточных условия и исходное условие в целом истинны
- 6) ответ: **1**.

Ещё пример задания:

Для какого из указанных значений X истинно высказывание $\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение (вариант 1, прямая подстановка):

- 7) определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
- 8) выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0		
2	0	0		
3	1	0		
4	1	1		

- 9) по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	
2	0	0	1	
3	1	0	0	
4	1	1	1	

- 10) значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

- 11) таким образом, ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно «забыть» отрицание (помните, что правильный ответ – всего один!)
- можно перепутать порядок операций (скобки, «НЕ», «И», «ИЛИ», «импликация»)
- нужно помнить таблицу истинности операции «импликация», которую очень любят составители тестов²
- этот метод проверяет только заданные числа и не дает общего решения, то есть не определяет все множество значений X , при которых выражение истинно

Решение (вариант 2, упрощение выражения):

² ... но которая, к сожалению, почти не нужна на практике. ☺

- 1) обозначим простые высказывания буквами:

$$A = X > 2, \quad B = X > 3$$

- 2) тогда можно записать все выражение в виде

$$\neg(A \rightarrow B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B}$$

- 3) выразим импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» (см. выше):

$$\neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B} = \overline{\overline{A} + B}$$

- 4) раскрывая по формуле де Моргана операцию «НЕ» для всего выражения, получаем

$$\neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B \quad \text{или} \quad \overline{\overline{A} + B} = A \cdot \overline{B}$$

- 5) таким образом, данное выражение истинно только тогда, когда А истинно ($X > 2$), а В – ложно ($X \leq 3$), то есть для всех X, таких что $2 < X \leq 3$

- 6) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

- 7) таким образом, ответ – 3.

Возможные проблемы:

- нужно помнить законы логики (например, формулы де Моргана)
- при использовании формул де Моргана нужно не забыть заменить «И» на «ИЛИ» и наоборот
- нужно не забыть, что инверсией (отрицанием) для выражения $X > 3$ является $X \leq 3$, а не $X < 3$

Решение (вариант 3, использование свойств импликации):

- 1) обозначим простые высказывания буквами:

$$A = X > 2, \quad B = X > 3$$

- 2) тогда исходное выражение можно переписать в виде $\neg(A \rightarrow B) = 1$ или $A \rightarrow B = 0$

- 3) импликация $A \rightarrow B$ ложна в одном единственном случае, когда $A = 1$ и $B = 0$; поэтому заданное выражение истинно для всех X, таких что $X > 2$ и $X \leq 3$

- 4) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

- 5) таким образом, ответ – 3.

Выводы:

- 1) в данном случае, наверное, проще третий вариант решения, однако он основан на том, что импликация ложна только для одной комбинации исходных данных; не всегда этот прием применим
- 2) второй и третий варианты позволяют не только проверить заданные значения, но и получить *общее* решение – все множество X, для которых выражение истинно; это более красиво для человека, обладающего математическим складом ума.

Задачи для тренировки³:

- 1) Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание
 $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X < 1))$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 2) Для какого числа X истинно высказывание $((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 3) Для какого числа X истинно высказывание $X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 4) Для какого имени истинно высказывание:
 $\neg(\text{Первая буква имени гласная} \rightarrow \text{Четвертая буква имени согласная})?$
 1) ЕЛЕНА 2) ВАДИМ 3) АНТОН 4) ФЕДОР
- 5) Для какого символического выражения неверно высказывание:
 $\text{Первая буква гласная} \rightarrow \neg(\text{Третья буква согласная})?$
 1) abedc 2) becde 3) babas 4) abcab
- 6) Для какого числа X истинно высказывание $(X > 2) \vee (X > 5) \rightarrow (X < 3)$
 1) 5 2) 2 3) 3 4) 4
- 7) Для какого из значений числа Z высказывание $((Z > 2) \vee (Z > 4)) \rightarrow (Z > 3)$ будет ложным?
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 8) Для какого имени истинно высказывание:
 $\neg(\text{Первая буква имени согласная} \rightarrow \text{Третья буква имени гласная})?$
 1) ЮЛИЯ 2) ПЕТР 3) АЛЕКСЕЙ 4) КСЕНИЯ

³ Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2011 гг.
2. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
3. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
4. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
5. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
6. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
7. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
8. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
9. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
10. Тренировочные и диагностические работы МИОО 2010-2011 гг.

- 9) Для какого из значений числа Y высказывание $(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \rightarrow (Y > 5))$ будет истинным?
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 10) Для какого символьного выражения верно высказывание:
 \neg (Первая буква согласная) \wedge \neg (Вторая буква гласная)?
 1) abcde 2) bcade 3) babas 4) cabab
- 11) Для какого имени истинно высказывание:
 (Вторая буква гласная \rightarrow Первая буква гласная) \wedge Последняя буква согласная?
 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН
- 12) Для какого имени истинно высказывание:
 \neg (Первая буква согласная \rightarrow Последняя буква гласная) \wedge Вторая буква согласная?
 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) МАРИНА 4) ИВАН
- 13) Для какого имени истинно высказывание:
 (Первая буква согласная \rightarrow Вторая буква согласная) \wedge Последняя буква гласная?
 1) КСЕНИЯ 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН
- 14) Для какого имени истинно высказывание:
 \neg (Вторая буква гласная \rightarrow Первая буква гласная) \wedge Последняя буква согласная?
 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН
- 15) Для какого имени истинно высказывание:
 \neg (Первая буква согласная \rightarrow Последняя буква согласная) \wedge Вторая буква согласная?
 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) МАРИЯ 4) КСЕНИЯ
- 16) Для какого имени истинно высказывание:
 \neg (Первая буква гласная \rightarrow Вторая буква гласная) \wedge Последняя буква гласная?
 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) АРТЕМ 4) МАРИЯ
- 17) Для какого названия животного ложно высказывание:
 Заканчивается на согласную \wedge В слове 7 букв \rightarrow \neg (Третья буква согласная)?
 1) Верблюд 2) Страус 3) Кенгуру 4) Леопард
- 18) Для какого названия животного ложно высказывание:
 В слове 4 гласных буквы \wedge \neg (Пятая буква гласная) \vee В слове 5 согласных букв?
 1) Шиншилла 2) Кенгуру 3) Антилопа 4) Крокодил
- 19) Для какого названия животного ложно высказывание:
 Четвертая буква гласная \rightarrow \neg (Вторая буква согласная)?
 1) Собака 2) Жираф 3) Верблюд 4) Страус
- 20) Для какого слова ложно высказывание:

Первая буква слова согласная \rightarrow (Вторая буква имени гласная \wedge Последняя буква слова согласная)?

- 1) ЖАРА 2) ОРДА 3) ОГОРОД 4) ПАРАД

21) Для какого числа X истинно высказывание $(X \cdot (X-16) > -64) \rightarrow (X > 8)$

- 1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

22) Для какого числа X истинно высказывание $(X \cdot (X-8) > -25 + 2 \cdot X) \rightarrow (X > 7)$

- 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

23) Для какого символического набора истинно высказывание:

Вторая буква согласная \wedge (В слове 3 гласных буквы \vee Первая буква согласная)?

- 1) УББОШТ 2) ТУИОШШ 3) ШУБВОИ 4) ИТТРАО

24) Для какого имени ложно высказывание:

(Первая буква гласная \wedge Последняя буква согласная) \rightarrow \neg (Третья буква согласная)?

- 1) ДМИТРИЙ 2) АНТОН 3) ЕКАТЕРИНА 4) АНАТОЛИЙ

25) Для какого имени истинно высказывание:

Первая буква гласная \wedge Четвертая буква согласная \vee В слове четыре буквы?

- 1) Сергей 2) Вадим 3) Антон 4) Илья

26) Для какого числа X истинно высказывание

$((X < 4) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 3) \rightarrow (X < 1))$

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

27) Для какого имени истинно высказывание:

\neg (Первая буква согласная \rightarrow Вторая буква согласная) \wedge Последняя буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

28) Для какого имени истинно высказывание:

\neg (Первая буква согласная \rightarrow Последняя буква согласная) \wedge Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) КСЕНИЯ 4) МАРИЯ

29) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная \rightarrow Вторая буква согласная) \wedge Последняя буква гласная?

- 1) КСЕНИЯ 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

30) Для какого имени истинно высказывание:

\neg (Последняя буква гласная \rightarrow Первая буква согласная) \wedge Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) АРТЁМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

31) Для какого слова истинно высказывание:

\neg (Первая буква согласная \rightarrow (Вторая буква согласная \vee Последняя буква гласная))?

- 1) ГОРЕ 2) ПРИВЕТ 3) КРЕСЛО 4) ЗАКОН

32) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная \rightarrow Вторая буква гласная) \wedge Последняя буква согласная?

- 1) АЛИСА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) ЕЛЕНА

33) Для какого имени истинно высказывание:

(Вторая буква гласная \rightarrow Первая буква гласная) \wedge Последняя буква согласная?

- 1) АЛИСА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) ЕЛЕНА

34) Для какого названия реки ложно высказывание:

(Вторая буква гласная \rightarrow Предпоследняя буква согласная) \wedge Первая буква стоит в алфавите раньше третьей?

- 1) ДУНАЙ 2) МОСКВА 3) ДВИНА 4) ВОЛГА

35) Для каких значений X и Y истинно высказывание:

$(Y+1 > X) \vee (Y+X < 0) \wedge (X > 1)$?

- 1) X = 0,5; Y = -1,1 2) X = 1,1; Y = -4
3) X = -1; Y = -4 4) X = -1/10; Y = -1,1

36) Для какого слова истинно высказывание:

(Вторая буква согласная \vee Последняя буква гласная) \rightarrow Первая буква гласная?

- 1) ГОРЕ 2) ПРИВЕТ 3) КРЕСЛО 4) ЗАКОН

37) Для какого имени истинно высказывание:

Первая буква согласная \wedge (\neg Вторая буква согласная \rightarrow Четвертая буква гласная)?

- 1) ИВАН 2) ПЕТР 3) ПАВЕЛ 4) ЕЛЕНА

38) Для какого названия станции метро истинно высказывание:

(Первая буква согласная \rightarrow Вторая буква согласная) \sim Название содержит букву «л»?

Знаком \sim обозначается операция эквивалентности (результат $X \sim Y$ – истина, если значения X и Y совпадают).

- 1) Маяковская 2) Отрадное 3) Волжская 4) Комсомольская

39) Для какого названия города истинно высказывание:

(Первая буква гласная \wedge Последняя буква гласная) \sim Название содержит букву «м»?

Знаком \sim обозначается операция эквивалентности (результат $X \sim Y$ – истина, если значения X и Y совпадают).

- 1) Москва 2) Дюссельдорф 3) Амстердам 4) Атланта

40) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная \vee Вторая буква гласная) \rightarrow В слове 4 буквы?

- 1) МИХАИЛ 2) ГРИГОРИЙ 3) ЕВГЕНИЙ 4) ИОЛАНТА

41) Для какого числа X истинно высказывание $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X > 1))$

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4