

## B14 (повышенный уровень, время – 6 мин)

Тема: Анализ программы с подпрограммами.

Что нужно знать:

- функция – это вспомогательный алгоритм, который возвращает некоторое значение–результат
- в Паскале функция располагается выше основной программы и оформляется следующим образом (вместо многоточия могут быть любые операторы):

```
function F(x: integer):integer;
begin
  ...
  F:= <результат функции>
end;
```

- в заголовке функции записывают имя функции, в скобках – список параметров, далее через двоеточие – тип возвращаемого значения; в приведенном примере функция **F** принимает один целый параметр, к которому внутри функции нужно обращаться по имени **x**, и возвращает целое число
- результат функции записывается в специальную переменную, имя которой совпадает с именем функции; объявлять эту переменную не нужно
- если параметров несколько, для каждого из них указывают тип:

```
function F(x: integer; y: integer):integer;
```

- если несколько соседних параметров имеют одинаковый тип, можно их объединить в список:
- ```
function F(x, y: integer):integer;
```
- следующая программа ищет наименьшее значение функции **F(x)** на интервале **[a, b]**, просматривая значения от **a** до **b** с шагом 1:

```
M:=a; R:=F(a);
for t:=a to b do
  if F(t) < R then begin
    R:=F(t); M:=t;
  end;
```

- цикл для поиска наибольшего значения выглядит точно так же, только знак < нужно заменить на знак >
- если функция представляет собой квадратный трехчлен вида  $F(x) = ax^2 + bx + c$ , то абсцисса, соответствующая точке минимума, вычисляется по формуле

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a}$$

- если квадратный трехчлен задан в виде  $F(x) = a(x-p)(x-q)$ , то абсцисса, соответствующая точке минимума, вычисляется по формуле

$$x_{\min} = \frac{p+q}{2}$$

Пример задания:

Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```
Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=4*(x-1)*(x-3);
end;
BEGIN
```

```

a:=-20; b:=20;
M:=a; R:=F(a);
for t:=a to b do begin
  if (F(t)<R) then begin
    M:=t;
    R:=F(t);
  end;
end;
write(M);
END.

```

**Решение (способ 1, ручная прокрутка, перебор):**

- 1) заметим, что в программе есть цикл, в котором переменная **t** принимает последовательно все целые значения в интервале от **a** до **b**:

```

for t:=a to b do begin
  ...
end;

```

- 2) до начала цикла в переменную **M** записывается значение **a**, а в переменную **R** – значение функции в точке **a**:

```
M:=a; R:=F(a);
```

- 3) внутри цикла есть условный оператор, в котором вычисляется значение функции **F(t)** и сравнивается со значением переменной **R**:

```

if (F(t)<R) then begin
  M:=t;
  R:=F(t);
end;

```

если новое значение функции меньше, чем значение **R**, в **R** записывается значение функции в точке **t**, а в переменной **M** запоминается само значение **t** (аргумент функции, соответствующий значению в **R**)

- 4) в результате анализа пп. 1-3 можно сделать вывод, что цикл ищет минимум функции **F(t)** на интервале от **a** до **b**, и после выполнения цикла в переменной **M** оказывается значение аргумента **t**, при котором функция достигает минимума на заданном интервале (здесь это интервал [-20, 20])
- 5) функция **F** вычисляет значение

```
F:=4*(x-1)*(x-3);
```

- 6) перебираем все значения **t** от **a** до **b**, и для каждого вычисляем соответствующее значение функции:

|          |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |    |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| <b>t</b> | -20  | -19  | -18  | -17  | -16  | -15  | -14  | -13 | -12 | -11 | -10 | -9  | -8  | -7  | -6  | -5  | -4  | -3 | -2 | -1 | 0  |
| <b>F</b> | 1932 | 1760 | 1596 | 1440 | 1292 | 1152 | 1020 | 896 | 780 | 672 | 572 | 480 | 396 | 320 | 252 | 192 | 140 | 96 | 60 | 32 | 12 |

|          |   |    |   |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
|----------|---|----|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| <b>t</b> | 1 | 2  | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18   | 19   | 20   |
| <b>F</b> | 0 | -4 | 0 | 12 | 32 | 60 | 96 | 140 | 192 | 252 | 320 | 396 | 480 | 572 | 672 | 780 | 896 | 1020 | 1152 | 1292 |

- 7) по таблице находим, что минимальное значение **-4** достигается при **t=2**
- 8) таким образом, ответ: **2**.

**Возможные проблемы:**

- заполнение таблицы, особенно при большом интервале, очень трудоемко, велика возможность ошибки

**Решение (способ 2, математический анализ):**

- 1) повторяя рассуждения пп. 1-5 из предыдущего способа решения, находим, что программа ищет значение  $t$ , при котором функция  $F(t)$  принимает минимальное значение на интервале от  $a$  до  $b$ .
- 2) запишем функцию в виде квадратного трёхчлена:  

$$F(x) = 4(x-1)(x-3) = 4(x^2 - 4x + 3)$$
- 3) график этой функции – парабола, оси которой направлены вверх, поэтому функция имеет минимум
- 4) найдем абсциссу точки минимума, которая совпадает с абсциссой точки минимума функции  

$$F_1(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$
- 5) таким образом, ответ: **2**.

**Решение (способ 3, математический анализ, свойства параболы):**

- 1) повторяя рассуждения пп. 1-5 из первого способа решения, находим, что программа ищет значение  $t$ , при котором функция  $F(t)$  принимает минимальное значение на интервале от  $a$  до  $b$ .
- 2) заданная функция  $F(x) = 4(x-1)(x-3)$  имеет корни в точках  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$
- 3) график этой функции – парабола, оси которой направлены вверх (коэффициент при  $x^2$  равен  $4 > 0$ ), поэтому функция имеет минимум
- 4) парабола симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через вершину, поэтому абсцисса вершины – это среднее арифметическое корней:  

$$x_{\min} = \frac{1+3}{2} = 2$$
- 5) таким образом, ответ: **2**.

**Ещё пример задания:**

Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=x*x + 4*x + 8;
end;
BEGIN
  a:=-10; b:=10;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)> R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(R);
END.

```

**Решение:**

- 1) рассуждая так же, как и в предыдущем примере, можно показать, что программа ищет *наибольшее значение* функции  $F(t)$  на интервале от  $a$  до  $b$
- 2) заметим, что выводится не абсцисса, а именно это найденное *наибольшее значение функции*:  
`write(R);`

- 3) график заданной функции  $F(x) = x^2 + 4x + 8$  – это парабола, ветви которой направлены вверх, то есть она имеет точку минимума, но не точку максимума
- 4) поэтому нужно проверить значения функции на концах отрезка и выбрать из них наибольшее
- 5) при  $t=-10$  получаем  $F(t)=68$
- 6) при  $t=10$  получаем  $F(t)=148$
- 7) таким образом, ответ: **148**.

### Еще пример задания (Л.А. Тумарина, г. Электросталь):

Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=4*(x-1)*(x-3);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=0;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

#### Решение:

- 1) рассуждая так же, как и в примере 1, определяем, что программа ищет значение  $t$ , при котором функция  $F(t)$  принимает *минимальное* значение на интервале от  $a$  до  $b$ .
- 2) запишем функцию в виде квадратного трёхчлена:  

$$F(x) = 4(x-1)(x-3) = 4(x^2 - 4x + 3)$$
- 3) график этой функции – парабола, оси которой направлены вверх, поэтому функция имеет минимум
- 4) найдем абсциссу точки минимума, которая совпадает с абсциссой точки минимума функции  

$$F_1(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$
- 8) однако это значение не входит в интервал  $[-20; 0]$ , поэтому нужно проверить значения функции на концах отрезка и выбрать из них наименьшее; ответом будет соответствующее значение  $t$ .
- 9) при  $t=-20$  получаем  $F(-20)=4*(-21)*(-23)=1932$
- 10) при  $t=0$  получаем  $F(0)=4*(-1)*(-3)=12$ , это значение меньше, чем  $F(-20)$ , поэтому минимум на заданном интервале достигается при  $t=0$
- 5) таким образом, ответ: **0**

**Задачи для тренировки<sup>1</sup>:**

- 1) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=4*(x-5)*(x+3);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 2) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=- (x+4)*(x+2);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)>R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 3) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=3*(x-2)*(x+6);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R) then begin
      M:=t;

```

<sup>1</sup> Источники заданий:

1. Тренировочные работы МИОО 2011-2012.
2. Авторские разработки.

```

    R:=F(t);
  end;
end;
write(R);
END.

```

- 4) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(5-x)*(x+3);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)>R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(R);
END.

```

- 5) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(x-5)*(x+3);
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)>R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 6) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(x+5)*(x+3);
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)>R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

```

    end;
  end;
  write(R);
END.

```

- 7) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(x+7)*(1-x);
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 8) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(x+5)*(1-x);
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 9) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=(x+3)*(1-x);
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;

```

```

end;
write(R);
END.

```

- 10) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:= 2*x*x + 8*x + 10;
end;
BEGIN
  a:=-10; b:=10;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 11) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:= x*x + 6*x + 10;
end;
BEGIN
  a:=-10; b:=10;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)> R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 12) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:= x*x - 8*x + 10;
end;
BEGIN
  a:=-5; b:=5;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)> R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
end;

```

```

write(R) ;
END.

```

- 13) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:= x*x + 2*x + 10;
end;
BEGIN
  a:=-10; b:=10;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 14) (Л.А. Тумарина) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=4*(x-5)*(x+3);
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=0;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 15) (Л.А. Тумарина) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:= 2*x*x + 8*x + 10;
end;
BEGIN
  a:=0; b:=10;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)< R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;

```

```

end;
write(R);
END.

```

- 16) (Л.А. Тумарина) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

Var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=- (x+4) * (x+2) ;
end;
BEGIN
  a:=-2; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)>R) then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 17) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x: integer):integer;
begin
  F := 2*(x-9) * (x-9)+12;
end;
BEGIN
  a := -20; b := 20;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do
    if (F(t)<R) then begin
      M := t;
      R := F(t);
    end;
  end;
  write(M);
END.

```

- 18) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```

var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x: integer):integer;
begin
  F := 9*(x-15) * (x+17)+2;
end;
BEGIN
  a := -20; b := 20;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do
    if (F(t)<R) then begin
      M := t;
      R := F(t);
    end;
  end;
  write(M);

```

END.

19) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```
var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x: integer):integer;
begin
  F := -3*(x-10)*(x+2)+2;
end;
BEGIN
  a := -20; b := 20;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do
    if (F(t)>R) then begin
      M := t;
      R := F(t);
    end;
  write(M);
END.
```

20) Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:

```
var a,b,t,M,R :integer;
Function F(x: integer):integer;
begin
  F := 5*(x+10)*(x+2)+2;
end;
BEGIN
  a := -20; b := 20;
  M := a; R := F(a);
  for t := a to b do
    if (F(t)<R) then begin
      M := t;
      R := F(t);
    end;
  write(M);
END.
```