

B15 (высокий уровень, время – 10 мин)

Тема: Преобразование логических выражений.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике (\wedge , \vee , \neg), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает \wedge и \vee . Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек (\wedge , \vee , \neg), что еще раз подчеркивает проблему.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$ не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B, A \cdot B$ A и B (логическое умножение, конъюнкция)

$A \vee B, A + B$ A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$ импликация (следование)

$A \leftrightarrow B, A \equiv B$ эквиваленция (эквивалентность, равносильность)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция» (см. презентацию «Логика»)

- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ или в других обозначениях $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

- операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \leftrightarrow B = \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B$ или в других обозначениях $A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», потом – «импликация», и самая последняя – «эквиваленция»
- логическое произведение $A \cdot B \cdot C \dots$ равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0)
- логическая сумма $A + B + C \dots$ равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)
- правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\bar{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A; A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Пример задания:

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_5 \vee x_6) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_6 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

- 1) перепишем уравнение, заменив знаки логических операций:

$$(\overline{X_1} + X_2) \cdot (\overline{X_2} + X_3) \cdot (\overline{X_3} + X_4) \cdot (\overline{X_4} + X_5) \cdot (\overline{X_5} + X_6) = 1$$

- 2) учитывая, что $\overline{A} + B = A \rightarrow B$, заменяем все выражения в скобках на импликацию:

$$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) \cdot (X_5 \rightarrow X_6) = 1$$

- 3) решение уравнения можно записать в виде шести двоичных знаков, которые обозначают соответственно, переменные $X_1 \dots X_6$
- 4) далее вспомним, что импликация дает ложное значение, если её первая часть (посылка) истинна, а вторая (следствие) ложно, поэтому из $A \rightarrow B = 0$ сразу следует, что $A = 1, B = 0$
- 5) это значит, что в исходном выражении появится ноль, если в цепочке битов, соответствующей значениям переменных, появится комбинация 10, то есть предыдущее значение истинно, а следующее за ним – ложно
- 6) поэтому решениями этого уравнения будут все комбинации значений переменных, для которых в соответствующей битовой цепочке нет последовательности 10;
- 7) таких цепочек всего 7:
000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 111111
- 8) таким образом, ответ: **7 решений**.

Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg X_1 \vee X_2 = 1$$

$$\neg X_2 \vee X_3 = 1$$

...

$$\neg X_9 \vee X_{10} = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (последовательное решение, через единицы):

- 9) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 10) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1} + X_2 = 1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно имеет 3 решения (точнее, с учетом других переменных, 3 группы решений): $(0,0,*), (0,1,*)$ и $(1,1,*)$; здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
- 11) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:
- $$\begin{array}{l} (0,0,*) \\ (0,1,*) \\ (1,1,*) \end{array}$$
- 12) заметим, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым
- 13) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже имеет 3 группы решений: $(x_1,0,0,*), (x_1,0,1,*)$ и $(x_1,1,1,*)$, где x_1 – некоторое логическое значение переменной X_1

- 14) решения системы первых двух уравнений – это те комбинации значений переменных, которые удовлетворяют одновременно и первому, и второму
- 15) из п. 4 следует, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым, поэтому решение системы двух первых уравнений включает 4 группы: из $(x_1, 0, 0, *)$ и $(x_1, 0, 1, *)$ при $X_1 = 0$ получаем две группы $(0, 0, 0, *)$ и $(0, 0, 1, *)$ и из $(x_1, 1, 1, *)$ получается еще две: $(0, 1, 1, *)$ и $(1, 1, 1, *)$.
- 16) таким образом, система из двух уравнений имеет 4 решения
- 17) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:
- $(0, 0, 0, *)$
 $(0, 0, 1, *)$
 $(0, 1, 1, *)$
 $(1, 1, 1, *)$
- 18) таким образом, если $X_3 = 0$, все предыдущие переменные определяются однозначно – они должны быть равны нулю (идем по системе «снизу вверх»); если же $X_3 = 1$, то предыдущие переменные могут быть любыми, второе уравнение их не ограничивает
- 19) поэтому при увеличении числа переменных на единицу количество решений также увеличивается на единицу
- 20) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
- 21) таким образом, ответ: **11 решений**.

Решение (последовательное решение, через нули):

- 1) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1} + X_2 = 1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно НЕ выполняется только в одном случае (точнее, с учетом других переменных, для одной группы комбинаций): $(1, 0, *)$ здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
- 2) общее количество комбинаций X_1 и X_2 равно $2^2 = 4$, поэтому число решений первого уравнения равно $4 - 1 = 3$
- 3) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже ложно только для одной комбинации имеет 3 группы решений: $(x_1, 1, 0, *)$, где x_1 , – некоторое логическое значение переменной X_1
- 4) теперь рассмотрим вместе первое и второе уравнения и определим, в скольких случаях хотя бы одно из них неверно
- 5) множества $(1, 0, x_3, *)$ и $(x_1, 1, 0, *)$ не пересекаются, потому что в первом $X_2 = 0$, а во втором $X_2 = 1$, поэтому система из двух уравнений не выполнена для 4-х комбинаций: $(1, 0, 0, *)$, $(1, 0, 1, *)$, $(0, 1, 0, *)$ и $(1, 1, 0, *)$
- 6) общее количество комбинаций трех логических переменных равно $2^3 = 8$, поэтому количество решений системы из двух уравнений равно $8 - 4 = 4$
- 7) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
- 8) таким образом, ответ: **11 решений**.

Решение (табличный метод):

- 1) рассмотрим все решения первого уравнения $\overline{X_1} + X_2 = 1$ по таблице истинности:

$\overline{X_1} + X_2 = 1$	X_2	X_1
1	0	0
0	0	1

1	1	0
1	1	1

- 2) строка, выделенная красным фоном, не удовлетворяет условию, поэтому дальше ее рассматривать не будем
- 3) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	1	0
?	1	1

- 4) при каких значениях переменной X_3 будет верно условие $\overline{X_2} + X_3 = 1$? Очевидно, что на это уже не влияет X_1 (этот столбец выделен зеленым цветом). Если $X_2 = 1$, то сразу получаем, что $X_3 = 1$ (иначе $\overline{X_2} + X_3 = 0 + 0 = 0$):

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
1	1	0
1	1	1

- 5) как видно из таблицы, верхняя строка предыдущей таблицы (где были все нули) дает два решения при подключении очередного уравнения, а все остальные – по одному
- 6) понятно, что такая же ситуация будет продолжаться и дальше, то есть, при добавлении каждой новой переменной число решений увеличивается на 1
- 7) рассуждая таким образом и дальше, получаем, что для 3-х уравнений с 4-мя переменными будет 5 решений, для 4 уравнений – 6 решений, ..., а для 9 уравнений – 11 решений
- 8) обратите внимание на форму таблицы – единицы и нули образуют два треугольника
- 9) таким образом, ответ: **11 решений**.

Рекомендации:

- по-видимому, лучший способ решения задач этого типа основан на двух идеях:
 - замена переменных (если она возможна), позволяющая сократить количество неизвестных и таким образом упростить решение
 - последовательное решение уравнений, начиная с первого, затем система из первых двух, первых трех и т.д.
- для записи хода решения и минимизации путаницы лучше использовать табличный метод, при котором все переменные, от которых зависит очередное уравнение, размещены в крайних левых столбцах таблицы

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg (X_1 \equiv X_2) \vee (X_3 \equiv X_4) = 1$$

$$\neg (X_3 \equiv X_4) \vee (X_5 \equiv X_6) = 1$$

$$\neg (X_5 \equiv X_6) \vee (X_7 \equiv X_8) = 1$$

$$\neg (X_7 \equiv X_8) \vee (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) заметим, что при обозначениях $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$, $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$, $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$ и $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$ мы получаем систему из 4 уравнений и 5 независимыми переменными; эта система уравнений относится к типу, который рассмотрен в предыдущей разобранный задаче:

$$\neg Y_1 \vee Y_2 = 1$$

$$\neg Y_2 \vee Y_3 = 1$$

$$\neg Y_3 \vee Y_4 = 1$$

$$\neg Y_4 \vee Y_5 = 1$$

- 3) как следует из разбора предыдущей задачи, такая система имеет $5+1 = 6$ решений для переменных $Y_1 \dots Y_5$
- 4) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных, $X_1 \dots X_{10}$; для этого заметим, что переменные $Y_1 \dots Y_5$ независимы;
- 5) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары $(X_1; X_2)$ (как для случая $Y_1 = 0$, так и для случая $Y_1 = 1$)
- 6) у нас есть 5 переменных $Y_1 \dots Y_5$, каждая их комбинация дает 2 пары $(X_1; X_2)$, 2 пары $(X_3; X_4)$, 2 пары $(X_5; X_6)$, 2 пары $(X_7; X_8)$ и 2 пары $(X_9; X_{10})$, то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных
- 7) таким образом, общее количество решений равно $6 \cdot 32 = 192$
- 8) ответ: **192 решения**

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_3 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

$$(X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) \vee (\neg X_5 \wedge X_6) \vee (X_5 \wedge \neg X_6) = 1$$

$$(X_5 \wedge X_6) \vee (\neg X_5 \wedge \neg X_6) \vee (\neg X_7 \wedge X_8) \vee (X_7 \wedge \neg X_8) = 1$$

$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_8) \vee (\neg X_9 \wedge X_{10}) \vee (X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
- 3) заметим, что

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) = (X_1 \equiv X_2),$$

где символ \equiv означает операцию «эквивалентность» (значения равны);

- 4) кроме того,

$$(\neg X_3 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge \neg X_4) = (X_3 \oplus X_4) = \neg(X_3 \equiv X_4),$$

где символ \oplus означает операцию «исключающее ИЛИ» (значения НЕ равны); это операция, обратная эквивалентности

- 5) используем замену переменных, выделив члены, объединяющие пары исходных переменных (X_1 и X_2 , X_3 и X_4 , X_5 и X_6 , X_7 и X_8 , X_9 и X_{10})

$$Y_1 = \neg(X_1 \equiv X_2) \quad Y_2 = \neg(X_3 \equiv X_4)$$

$$Y_3 = \neg(X_5 \equiv X_6) \quad Y_4 = \neg(X_7 \equiv X_8)$$

$$Y_5 = \neg(X_9 \equiv X_{10})$$

- 6) при этих обозначения система уравнений преобразуется к виду

$$\neg Y_1 \vee Y_2 = 1$$

$$\neg Y_2 \vee Y_3 = 1$$

$$\neg Y_3 \vee Y_4 = 1$$

$$\neg Y_4 \vee Y_5 = 1$$

- 9) как показано выше (при разборе пред-предыдущей задачи), такая система имеет $5+1 = 6$ решений для независимых переменных $Y_1 \dots Y_5$

- 10) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = \overline{(X_1 \equiv X_2)}$, по таблице истинности операции «эквивалентность» есть **две** соответствующих пары ($X_1; X_2$) (как для случая $Y_1 = 0$, так и для случая $Y_1 = 1$)

- 11) у нас есть 5 переменных $Y_1 \dots Y_5$, каждая их комбинация дает 2 пары ($X_1; X_2$), 2 пары ($X_3; X_4$), 2 пары ($X_5; X_6$), 2 пары ($X_7; X_8$) и 2 пары ($X_9; X_{10}$), то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных

- 12) таким образом, общее количество решений равно $6 \cdot 32 = 192$

- 7) ответ: **192 решения**

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$

$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 1$$

$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
- 3) рассмотрим первое уравнение, заменив обозначения логических операций на более простые:

$$Y_1 \cdot Y_2 + \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} = 1,$$

где $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ и $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$. Выражение в левой части последнего равенства – это операция эквивалентности между Y_1 и Y_2 , то есть первое уравнение запишется в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

- 4) аналогично, вводя обозначения $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$, $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$ и $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$, запишем исходную систему в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

$$(Y_2 \equiv Y_3) = 1$$

$$(Y_3 \equiv Y_4) = 1$$

$$(Y_4 \equiv Y_5) = 1$$

заметим, что все переменные здесь независимы друг от друга

- 13) найдем решение этой системы относительно **независимых** переменных $Y_1 \dots Y_5$
- 14) первое уравнение имеет два решения (с учетом остальных переменных – две группы решений): $(0,0,*)$ и $(1,1,*)$, где * обозначает остальные переменные, которые могут быть любыми
- 15) второе уравнение тоже имеет две группы решений: $(x_1,0,0,*)$ и $(x_1,1,1,*)$, где x_1 обозначает некоторое значение переменной x_1
- 16) теперь ищем решения, которые удовлетворяют и первому, и второму уравнению; очевидно, что их всего 2: $(0,0,0,*)$ и $(1,1,1,*)$
- 17) рассуждая дальше аналогичным образом, приходим к выводу, что система имеет всего два решения относительно переменных $Y_1 \dots Y_5$: все нули и все единицы
- 18) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных, $X_1 \dots X_{10}$; для этого вспомним, что переменные $Y_1 \dots Y_5$ независимы;
- 19) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары $(X_1; X_2)$ (как для случая $Y_1 = 0$, так и для случая $Y_1 = 1$)
- 20) у нас есть 5 переменных $Y_1 \dots Y_5$, каждая их комбинация дает 2 допустимых пары $(X_1; X_2)$, 2 пары $(X_3; X_4)$, 2 пары $(X_5; X_6)$, 2 пары $(X_7; X_8)$ и 2 пары $(X_9; X_{10})$, то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных
- 21) таким образом, общее количество решений равно $2 \cdot 32 = 64$
- 22) ответ: **64 решения**

Решение (табличный метод):

- 1) так же, как и в предыдущем варианте, с помощью замены переменных сведем систему к виду:

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

$$(Y_2 \equiv Y_3) = 1$$

$$(Y_3 \equiv Y_4) = 1$$

$$(Y_4 \equiv Y_5) = 1$$

- 2) рассмотрим все решения первого уравнения $(Y_1 \equiv Y_2) = 1$ по таблице истинности:

$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$	Y_2	Y_1
1	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

- 3) строчки, выделенные красным фоном, не удовлетворяют условию, поэтому дальше их рассматривать не будем
- 4) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

Y_3	Y_2	Y_1
?	0	0
?	1	1

- 5) при каких значениях переменной X_3 будет верно условие $(Y_2 \equiv Y_3) = 1$? Очевидно, что на это уже не влияет Y_1 (этот столбец выделен зеленым цветом). Сразу получаем два решения:

X_3	X_2	X_1
0	0	0

1	1	1
---	---	---

- 6) как видно из таблицы, каждая строчка предыдущей таблицы дает одно решение при подключении очередного уравнения, поэтому для любого количества переменных система имеет 2 решения – все нули и все единицы
- 7) так же, как и в предыдущем способе, переходим к исходным переменным и находим общее количество решений: $2 \cdot 32 = 64$
- 8) ответ: **64 решения**

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned} (X_2 \equiv X_1) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) &= 1 \\ (X_3 \equiv X_1) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) &= 1 \\ &\dots \\ (X_9 \equiv X_1) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) &= 1 \\ (X_{10} \equiv X_1) &= 0 \end{aligned}$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) переписем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$\begin{aligned} (X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} &= 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} &= 1 \\ &\dots \\ (X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} &= 1 \\ X_{10} \equiv X_1 &= 0 \end{aligned}$$

- 3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = (X_2 \equiv X_3)$, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) &= 1 \\ (X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) &= 1 \\ &\dots \\ (X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) &= 1 \\ X_{10} \equiv X_1 &= 0 \end{aligned}$$

- 4) первое уравнение выполняется, когда есть X_2 равно X_1 или X_3
- 5) по таблице истинности находим 6 вариантов (для удобства мы будем записывать сначала столбец для X_1 , а потом для всех остальных в обратном порядке):

X_1	X_3	X_2
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0

1	0	1
1	1	1

обратите внимание, что в каждой строчке в первых двух столбцах должно быть по крайней мере одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым)

- 6) добавим еще одно уравнение и еще одну переменную X_4 :

X_1	X_4	X_3	X_2
0	?	0	0
0	?	1	0
0	?	1	1
1	?	0	0
1	?	0	1
1	?	1	1

- 7) чтобы «подключить» второе уравнение, нужно использовать то же самое правило: каждой строчке в первых двух столбцах должно быть, по крайней мере, одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым); это значит, что в первой и последней строчках (где $X_1 = X_3$) значение X_4 может быть любое (0 или 1), а в остальных строчках – только строго определенное:

X_1	X_4	X_3	X_2
0	0	0	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- 8) таким образом, количество решений при подключении очередного уравнения к системе возрастает на 2!
- 9) подключили X_5 – получили 10 решений, X_6 – получили 12 решений, X_7 – получили 14 решений, X_8 – получили 16 решений, X_9 – получили 18 решений, X_{10} – получили 20 решений.
- 10) остается одно последнее уравнение $(X_{10} \equiv X_1) = 0$, из которого следует, что X_{10} не равен X_1
- 11) из таблицы следует, что только в первой и последней строчках значения первой и последней переменных совпадают, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2
- 12) таким образом, получается $20 - 2 = 18$ решений
- 13) ответ: **18 решений**

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

- 3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

- 4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные были независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом
- 5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных X_1 и X_2 , и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

- 6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где $X_1 = X_2$, значения X_3 могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где $X_1 \neq X_2$, мы сразу получаем, что для выполнения первого уравнения необходимо $X_1 = X_3$, то есть, эти две строчки дают по одному решению:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
1	0	1
0	1	0
0	1	1
1	1	1

- 7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах (X_2 и X_1) или не равны;
- 8) также заметим, что в новой таблице в самой верхней и самой нижней строках значения X_3 и X_2 равны, а в остальных не равны (их 4 штуки); поэтому на следующем шаге (при подключении четвертой переменной и третьего уравнения) верхняя и нижняя строки дадут 2 варианта с равными X_4 и X_3 , и $2 + 4 = 6$ вариантов, где X_4 и X_3 не равны
- 9) в общем виде: если на шаге i в таблице решений есть n_i строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и ...

m_i строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны, то на следующем шаге будет столько же (n_i) строк с равными значения в двух самых последних столбцах и $n_i + m_i$ строк с неравными значениями

10) эту последовательность можно записать в виде таблицы (i – число задействованных переменных):

i	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	2	4	6
4	2	2+4=6	8
5	2	2+6=8	10
6	2	2+8=10	12
7	2	2+10=12	14
8	2	2+12=14	16
9	2	2+14=16	18
10	2	2+16=18	20

11) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно $2 + 18 = 20$

12) ответ: **20 решений**

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу

2) переписем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$

...

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные были независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом

- 5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных X_1 и X_2 , и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

- 6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где $X_1 = X_2$, значения X_3 могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где $X_1 \neq X_2$, мы сразу получаем, что для выполнения первого уравнения необходимо $X_2 = X_3$, то есть, эти две строчки дают по одному решению:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	1	1

- 7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах (X_2 и X_1) или не равны;
- 8) переставим строки так, чтобы сверху стояли те строки, в которых $X_2 = X_3$:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1
1	0	0
0	1	1

- 9) также заметим, что в новой таблице в четырех строках значения $X_2 = X_3$, а в остальных 2-х эти переменные не равны;
- 10) поэтому на следующем шаге (при подключении четвертой переменной и третьего уравнения) 4 первые строки дадут по 2 варианта (всего $4 \cdot 2=8$) решений, из них 4 штуки с равными X_4 и X_3 , и 4 варианта, где X_4 и X_3 не равны
- 11) две нижние строки, где $X_2 \neq X_3$, дадут 2 варианта, где X_4 и X_3 равны
- 12) в общем виде: если на шаге i в таблице решений есть
- n_i строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и ...
 - m_i строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны,
- то на следующем шаге будет $(n_i + m_i)$ строк с равными значения в двух самых последних столбцах и n_i строк с неравными значениями
- 13) эту последовательность можно записать в виде таблицы (i – число задействованных переменных):

i	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	4	2	6
4	4+2=6	4	10

5	6+4=10	6	16
6	10+6=16	10	26
7	16+10=26	16	42
8	26+16=42	26	68
9	42+26=68	42	110
10	68+42=110	68	178

14) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно $110 + 68 = 178$

15) ответ: **178 решений**

Решение (использование дерева для представления решения):

- идея представления множества решений в виде дерева использовалась, например, в решениях **О.А. Тузовой** (Санкт-Петербург, школа № 550) и **М.В. Демидовой** (г. Пермь, гимназия №17); как верно отметила О.А. Тузова, предложенный выше табличный метод по сути представляет собой компактную запись дерева

- так же, как и в предыдущем варианте решения, перейдем к равносильной системе уравнений

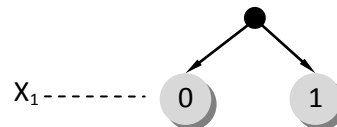
$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

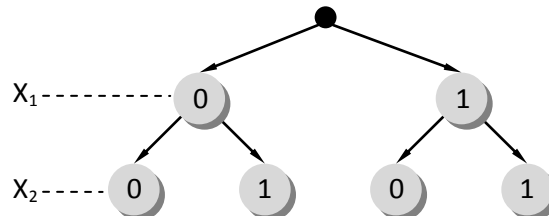
...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

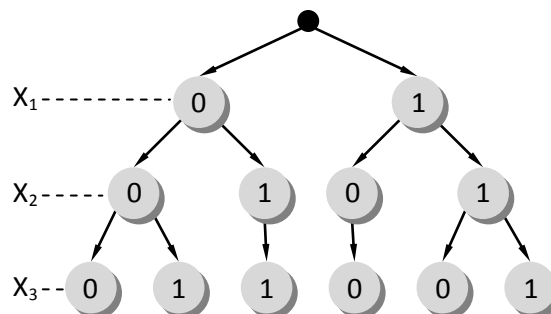
- все переменные логические, в принятых обозначениях каждая из них может быть равна 1 или 0; для X_1 получаем два варианта, которые можно представить в виде



- при этом X_2 может быть любым, то есть, имеем всего 4 варианта



- теперь рассматриваем переменную X_3 ; если $X_1 = X_2$, то уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$ выполняется при любом X_3 ; если $X_1 \neq X_2$, то это уравнение сразу дает $X_3 = X_2$; дерево получается уже неполным, число решений первого уравнения – 6:



- рассуждая аналогично, находим, что на следующем шаге (подключение переменной X_4 и второго уравнения) получается 10 решений, затем – 16 и т.д.; в результате получается удвоенная последовательность Фибоначчи (2, 4, 6, 10, 16, 26, ...), в которой каждый следующий элемент равен сумме двух предыдущих:

i	число решений
---	---------------

3	6
4	10
5	16
6	26
7	42
8	68
9	110
10	178

- 7) в некоторых вариантах такой подход рассматривался совместно с *методом декомпозиции*: сначала предполагаем, что $X_1 = 0$ и находим все решения для этого варианта; затем находим все решения при $X_1 = 1$; после этого общее количество решений вычисляется как сумма полученных двух чисел
- 8) ответ: **178 решений**

Ещё пример задания:

Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание

$$(50 < X \cdot X) \rightarrow (50 > (X+1) \cdot (X+1))$$

Решение (вариант 1):

- это операция импликации между двумя отношениями $A = (50 < X^2)$ и $B = (50 > (X+1)^2)$
- попробуем сначала решить неравенства

$$A = 50 < X^2 \Rightarrow |X| > \sqrt{50}, \quad B = 50 > (X+1)^2 \Rightarrow |X+1| < \sqrt{50}$$
- обозначим эти области на оси X :



на рисунке фиолетовые зоны обозначают область, где истинно выражение A , голубая зона – это область, где истинно B

- 4) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$; область истинности выделена зеленым цветом
- поэтому наибольшее целое число, удовлетворяющее условию – это первое целое число, меньшее $\sqrt{50} \approx 7,1$, то есть, 7
- таким образом, верный ответ – **7**.

Возможные проблемы:

- в этом примере потребовалось применить знания не только (и не столько) из курса информатики, но и умение решать неравенства
- нужно не забыть правила извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства (операции с модулями)

Решение (вариант 2, преобразование выражения):

- 1) сначала можно преобразовать импликацию, выразив ее через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

- 2) это значит, что выражение истинно там, где $A = 0$ или $B = 1$
- 3) дальнейшие действия точно такие же, как и в варианте 1.

Возможные проблемы:

- нужно помнить формулу для преобразования импликации

Решение (вариант 3, математический):

- 1) это операция импликации между двумя отношениями $A = (50 < X^2)$ и $B = (50 > (X + 1)^2)$
- 2) пусть $A = (X^2 > 50)$ – истинно, тогда, с учетом того, что $X^2 > 0$, находим, что $B = ((X + 1)^2 < 50)$ – ложно, таким образом, импликация $A \rightarrow B$ ложна
- 3) следовательно, импликация может быть истинной только при $X^2 \leq 50$; поскольку в этом случае высказывание A ложно, то $A \rightarrow B = 0 \rightarrow B = 1$ при любом B
- 4) максимальное целое значение X , при котором $X^2 \leq 50$, равно 7
- 5) таким образом, верный ответ – **7**.

Еще пример задания:

Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание

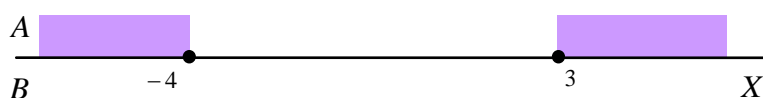
$$(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$$

Решение (в целых числах):

- 1) это операция импликации между двумя отношениями:

$$A_0 = (10 < X \cdot (X + 1)) \text{ и } B_0 = (10 > (X + 1) \cdot (X + 2))$$
- 2) конечно, здесь можно применить тот же способ, что и в предыдущем примере, однако при этом понадобится решать квадратные уравнения (*не хочется...*)
- 3) заметим, что по условию нас интересуют **только целые числа**, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (как понятно из предыдущего примера, точные значения корней нас совершенно не интересуют!)
- 4) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X + 1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- 5) легко проверить, что в области $X \geq 0$ высказывание A_0 истинно при всех целых $X \geq 3$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \leq -4$ (чтобы не запутаться, удобнее использовать **нестрогие неравенства**, \leq и \geq , вместо $<$ и $>$)
- 6) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение

$$A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$$
- 7) область истинности выражения A – объединение двух бесконечных интервалов:



8) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X + 1) \cdot (X + 2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;

9) в области $X \geq 0$ высказывание B_0 истинно при всех целых $X \leq 1$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \geq -4$, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение

$$B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$$

10) область истинности выражения B – закрытый интервал, обозначенный голубой полоской



11) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

12) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$; область истинности выделена на рисунке зеленым цветом;

13) обратите внимание, что значение $X = 3$ уже **не** входит в зеленую зону, потому что там $A = 1$ и $B = 0$, то есть импликация дает 0

14) по схеме видно, что максимальное целое число в зеленой области – 2

15) таким образом, верный ответ – **2**.

Возможные проблемы:

- нужно помнить, что мы рассматриваем значения выражения только для целых X , при этом появляются свои особенности: может появиться желание продлить зеленую область до точки $X = 3$, что приведет к неверному ответу, потому что там уже $A = 1$ и $A \rightarrow B = 1 \rightarrow 0 = 0$

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \vee L) \rightarrow (L \wedge M \wedge N)) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, разделение на части):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N)) = 0$$

2) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это равенство верно тогда и только тогда, когда одновременно

$$K + L = 1 \quad \text{и} \quad L \cdot M \cdot N = 0$$

- 3) из первого уравнения следует, что хотя бы одна из переменных, K или L, равна 1 (или обе вместе); поэтому рассмотрим три случая
- 4) если $K = 1$ и $L = 0$, то второе равенство выполняется при любых M и N; поскольку существует 4 комбинации двух логических переменных (00, 01, 10 и 11), имеем 4 разных решения
- 5) если $K = 1$ и $L = 1$, то второе равенство выполняется при $M \cdot N = 0$; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще 3 решения
- 6) если $K = 0$, то обязательно $L = 1$ (из первого уравнения); при этом второе равенство выполняется при $M \cdot N = 0$; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще 3 решения
- 7) таким образом, всего получаем $4 + 3 + 3 = 10$ решений.

Совет:

- лучше начинать с того уравнения, где меньше переменных

Возможные проблемы:

- есть риск потерять какие-то решения при переборе вариантов

Решение (вариант 2, через таблицы истинности):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N)) = 0$$

- 2) построим таблицу для логического выражения

$$X = ((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N))$$

и подсчитаем, сколько в ней нулей, это и будет ответ

- 3) наше выражение зависит от четырех переменных, поэтому в таблице будет $2^4 = 16$ строчек (16 возможных комбинация четырех логических значений)
- 4) подставляем различные комбинации в формулу для X; несмотря на большое количество вариантов, таблица строится легко: достаточно вспомнить, что выражение $K + L$ ложно только при $K = L = 0$, а выражение $L \cdot M \cdot N$ истинно только при $L = M = N = 1$.

K	L	M	N	K+L	L·M·N	X
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

- 5) в последнем столбце 10 нулей; это значит, что есть 10 разных комбинаций, при которых выражение X равно нулю, то есть исходное уравнение имеет 10 решений

б) таким образом, всего 10 решений.

Возможные проблемы:

- нужно строить таблицу истинности функции от 4 переменных, это трудоемко, легко ошибиться

Еще пример задания:

Укажите значения переменных K, L, M, N , при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow (\neg K \wedge \neg M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

Решение (вариант 1, анализ исходного выражения):

- 1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций (условие «выражение ложно» означает, что оно равно логическому нулю):

$$((\overline{M+L}) \cdot K) \rightarrow (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$

- 2) из формулировки условия следует, что выражение должно быть ложно только для одного набора переменных
- 3) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это выражение ложно тогда и только тогда, когда одновременно

$$(\overline{M+L}) \cdot K = 1 \quad \text{и} \quad \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 4) первое равенство (логическое произведение равно 1) выполняется тогда и только тогда, когда $K = 1$ и $\overline{M+L} = 1$; отсюда следует $M+L = 0$ (логическая сумма равна нулю), что может быть только при $M = L = 0$; таким образом, три переменных мы уже определили
- 5) из второго условия, $\overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$, при $K = 1$ и $M = 0$ получаем $N = 0$
- 6) таким образом, правильный ответ – 1000.

Возможные проблемы:

- переменные однозначно определяются только для ситуаций «сумма = 0» (все равны 0) и «произведение = 1» (все равны 1), в остальных случаях нужно рассматривать разные варианты
- не всегда выражение сразу распадается на 2 (или более) отдельных уравнения, каждое из которых однозначно определяет некоторые переменные

Решение (вариант 2, упрощение выражения):

- 1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((\overline{M+L}) \cdot K) \rightarrow (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$

- 2) заменим импликацию по формуле $A \rightarrow B = \overline{A} + B$:

$$((\overline{M+L}) \cdot K) + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 3) раскроем инверсию сложного выражения по формуле де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:

$$M + L + \overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 4) упростим выражение $\overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} = \overline{K}(1 + \overline{M}) = \overline{K}$:

$$M + L + \overline{K} + N = 0$$

- 5) мы получили уравнение вида «сумма = 0», в нем все слагаемые должны быть равны нулю
- 6) поэтому сразу находим $M = L = N = 0, K = 1$
- 7) таким образом, правильный ответ – 1000.

Замечание:

- этот способ работает всегда и дает более общее решение; в частности, можно легко обнаружить, что уравнение имеет несколько решений (тогда оно не сведется к форме «сумма = 0» или «произведение = 1»)

Возможные проблемы:

- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

Еще пример задания:

Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = (A \leftrightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow (B \vee C))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 27, столбец значений аргумента B – числа 77, столбец значений аргумента C – числа 120. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

Решение (вариант 1):

- 1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \rightarrow (B + C))}$$

- 2) это выражение с тремя переменными, поэтому в таблице истинности будет $2^3=8$ строчек; следовательно, двоичная запись чисел, по которым строятся столбцы таблицы A , B и C , должна состоять из 8 цифр
- 3) переведем числа 27, 77 и 120 в двоичную систему, сразу дополняя запись до 8 знаков нулями в начале чисел

$$27 = 00011011_2 \quad 77 = 01001101_2 \quad 120 = 01111000_2$$

- 4) теперь можно составить таблицу истинности (см. рисунок справа), в которой строки переставлены в сравнении с традиционным порядком¹; зеленым фоном выделена двоичная запись числа 27 (биты записываются сверху вниз), синим – запись числа 77 и розовым – запись числа 120:

A	B	C	X
0	0	0	
0	1	1	
0	0	1	
1	0	1	
1	1	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

- 5) вряд ли вы сможете сразу написать значения функции X для каждой комбинации, поэтому удобно добавить в таблицу дополнительные столбцы для расчета промежуточных результатов (см. таблицу ниже)

- 6) заполняем столбцы таблицы:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B + C$	$A \rightarrow (B + C)$	$\overline{A \rightarrow (B + C)}$	X
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0

¹ Проверьте, что обычно (когда комбинации располагаются по возрастанию соответствующих двоичных чисел), столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа $15 = 1111_2$, столбец значений аргумента B – числа $51 = 110011_2$, столбец значений аргумента C – числа $85 = 1010101_2$.

1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

значение $A \leftrightarrow B$ равно 1 только в тех строчках, где $A = B$

значение $B + C$ равно 1 только в тех строчках, где $B = 1$ или $C = 1$

значение $A \rightarrow (B + C)$ равно 0 только в тех строчках, где $A = 1$ и $B + C = 0$

значение $\overline{A \rightarrow (B + C)}$ – это инверсия предыдущего столбца (0 заменяется на 1, а 1 – на 0)

результат X (последний столбец) – это логическая сумма двух столбцов, выделенных фиолетовым фоном

- 7) чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз: $X = 10101011_2$
- 8) переводим это число в десятичную систему: $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
- 9) таким образом, правильный ответ – **171**.

Возможные проблемы:

- нужно помнить таблицы истинности логических операций
- легко запутаться в многочисленных столбцах с однородными данными (нулями и единицами)

Решение (вариант 2, преобразование логической функции):

- 1) выполним пп. 1-5 так же, как и в предыдущем способе
- 2) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{A \rightarrow (B + C)}$$

- 3) раскроем импликацию через операции И, ИЛИ и НЕ ($A \rightarrow B = \bar{A} + B$):

$$A \rightarrow (B + C) = \bar{A} + B + C$$

- 4) раскроем инверсию для выражения $A \rightarrow (B + C) = \bar{A} + B + C$ по формуле де Моргана:

$$\overline{A \rightarrow (B + C)} = \overline{\bar{A} + B + C} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

- 5) таким образом, выражение приобретает вид $X = (A \leftrightarrow B) + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
- 6) отсюда сразу видно, что $X = 1$ только тогда, когда $A = B$ или $(A = 1$ и $B = C = 0)$:

A	B	C	X	Примечание
0	0	0	1	$A = B$
0	1	1	0	
0	0	1	1	$A = B$
1	0	1	0	
1	1	1	1	$A = B$
0	1	0	0	
1	0	0	1	$A = 1, B = C = 0$
1	1	0	1	$A = B$

- 7) чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз: $X = 10101011_2$
- 8) переводим это число в десятичную систему: $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
- 9) таким образом, правильный ответ – **171**.

Возможные проблемы:

- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

Еще пример задания:

A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg (A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (B > C)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C > B))$$

Чему равно B, если A = 45 и C = 43?

Решение (вариант 1):

- 1) обратим внимание, что это сложное высказывание состоит из трех простых

$$\neg (A = B)$$

$$(A > B) \rightarrow (B > C)$$

$$(B > A) \rightarrow (C > B)$$

- 2) эти простые высказывания связаны операцией \wedge (И, конъюнкция), то есть, они должны выполняться одновременно
- 3) из $\neg (A = B) = 1$ сразу следует, что $A \neq B$
- 4) предположим, что $A > B$, тогда из второго условия получаем $1 \rightarrow (B > C) = 1$; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда $B > C = 1$
- 5) поэтому имеем $A > B > C$, этому условию соответствует только число 44
- 6) на всякий случай проверим и вариант $A < B$, тогда из второго условия получаем $0 \rightarrow (B > C) = 1$; это выражение истинно при любом B; теперь смотрим третье условие: получаем $1 \rightarrow (C > B) = 1$; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда $C > B$, и тут мы получили противоречие, потому что нет такого числа B, для которого $C > B > A$
- 7) таким образом, правильный ответ – 44.

Решение (вариант 2, интуитивный):

- 1) заметим, что между A и C расположено единственное число 44, поэтому можно предполагать, что именно это и есть ответ
- 2) проверим догадку, подставив в заданное выражение $A = 45, B = 44$ и $C = 43$

$$\neg (45 = 44) \wedge ((45 > 44) \rightarrow (44 > 43)) \wedge ((44 > 45) \rightarrow (43 > 44))$$

- 3) заменим истинные условия на 1, а ложные – на 0:

$$\neg (0) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (0 \rightarrow 0)$$

- 4) вычисляем по таблице результаты операций \neg (НЕ, отрицание) и \rightarrow (импликация):

$$1 \wedge 1 \wedge 1$$

- 5) остается применить операцию \wedge (И, конъюнкция) – получаем 1, то есть, выражение истинно, что нам и нужно
- 6) таким образом, правильный ответ – 44.

Возможные проблемы:

- не всегда удастся сразу догадаться

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (поиск неподходящих комбинаций):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$K \cdot L \cdot M + \bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 0$$

- 2) здесь используется сложение двух логических произведений, которое равно 1 если одно из двух слагаемых истинно
- 3) поскольку произведения включают много переменных, можно предположить, что они равны 1 в небольшом числе случаев, поэтому мы попытаемся найти количество решений «обратного» уравнения

$$K \cdot L \cdot M + \bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 1 \quad (*)$$

а потом вычтем это число из общего количества комбинаций значений переменных K, L, M, N (для четырех логических переменных, принимающих два значения (0 или 1), существует $2^4=16$ различных комбинаций)

- 4) уравнение $K \cdot L \cdot M = 1$ имеет два решения: требуется, чтобы $K = L = M = 1$, а N может принимать любые (логические) значения, то есть, 0 или 1; эти два решения – 1110 и 1111
- 5) уравнение $\bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 1$ также имеет два решения: требуется, чтобы $L = M = 0$, $N = 1$, а K может быть равно 0 или 1; эти два решения – 0001 и 1001
- 6) среди полученных четырех решений нет одинаковых, поэтому уравнение (*) имеет 4 решения
- 7) это значит, что исходное уравнение истинно для всех остальных $16-4=12$ комбинаций переменных K, L, M, N
- 8) таким образом, правильный ответ – **12**.

Возможные проблемы:

- не всегда удастся догадаться, что неверных комбинаций меньше
- нужно проверять, что среди найденных решений нет одинаковых

Еще пример задания:

Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X + 3) > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot (X + 2) \leq X \cdot X + 11)$$

Решение (преобразование выражений):

- 1) несмотря на страшный вид, эта задача решается очень просто; сначала раскроем скобки в обеих частях импликации:

$$(X \cdot X + 3 \cdot X > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot X + 2 \cdot X \leq X \cdot X + 11)$$

- 2) теперь в каждой части вычтем $X \cdot X$ из обеих частей неравенства:

$$(3 \cdot X > 7) \rightarrow (2 \cdot X \leq 11)$$

- 3) в целых числах это равносильно:

$$(X \geq 3) \rightarrow (X \leq 5)$$

- 4) вспомним, как раскрывается импликация через операции ИЛИ и НЕ: $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

- 5) учитывая, что $A = X \geq 3$, имеем $\bar{A} = X < 3$, следовательно

$$(X < 3) \text{ или } (X \leq 5)$$

- 6) это равносильно высказыванию $(X \leq 5)$

- 7) таким образом, ответ – 5.

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N)) \vee \neg((M \wedge N) \rightarrow (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge N \wedge K \wedge L) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, упрощение выражения):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$\overline{((J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))} + M \cdot N \cdot K \cdot L = 0$$

- 2) логическая сумма трех слагаемых равна нулю, поэтому каждое из них должно быть равно нулю

- 3) обозначим сумму двух первых слагаемых через S_{12} и попытаемся «свернуть» ее; для этого представим импликацию в виде $J \rightarrow K = \bar{J} + K$, тогда

$$S_{12} = \overline{((J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))} = \overline{(\bar{J} + K) \rightarrow M \cdot N} + \overline{(M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K))}$$

- 4) выполним замены $A = \bar{J} + K$ и $B = M \cdot N$, тогда

$$S_{12} = \overline{(A \rightarrow B)} + \overline{(B \rightarrow A)}$$

- 5) раскроем импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» ($A \rightarrow B = \bar{A} + B$):

$$S_{12} = \overline{\bar{A} + B} + \overline{B + A}$$

- 6) теперь применим формулу де Моргана $\overline{\bar{A} + B} = A \cdot \bar{B}$:

$$S_{12} = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A}$$

- 7) заметим, что в третьем слагаемом $M \cdot N \cdot K \cdot L$ тоже есть сомножитель $B = M \cdot N$, поэтому уравнение можно переписать в виде

$$A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} + B \cdot K \cdot L = 0$$

или

$$A \cdot \bar{B} + B \cdot (\bar{A} + K \cdot L) = 0$$

- 8) это равенство выполняется, тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю;

- 9) учитывая, что в первом слагаемом есть сомножитель \bar{B} , а во втором $-B$, это может быть в двух случаях:

а) $B = 0, A = 0, L$ – любое (0 или 1)

б) $B = 1, \bar{A} + K \cdot L = 0$

- 10) рассмотрим случай «а»: условию $B = M \cdot N = 0$ удовлетворяют 3 пары (M, N) : $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$; из условия $A = \bar{J} + K = 0$ сразу получаем, что $J = 1$ и $K = 0$; учитывая, что L – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;

- 11) в случае «б» условие $B = M \cdot N = 1$ сразу дает $M = N = 1$; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана:

$$\bar{A} + K \cdot L = \overline{\bar{J} + K} + K \cdot L = J \cdot \bar{K} + K \cdot L = 0$$

это значит, что при $K = 0$ получаем $J = 0$ и L – любое (2 решения), а при $K = 1$ имеем $L = 0$ и J – любое (еще 2 решения)

- 12) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено $6 + 2 + 2 = 10$ решений

- 13) ответ – **10**.

Решение (вариант 2, использование свойств импликации):

- 1) выполнив шаги 1-4 из первого варианта решения, получим

$$S_{12} = \overline{(A \rightarrow B)} + \overline{(B \rightarrow A)}$$

при заменах $A = \bar{J} + K$ и $B = M \cdot N$

- 2) поскольку нужно, чтобы $S_{12} = 0$, оба слагаемых равны нулю, то есть, обе импликации истинны: $A \rightarrow B = 1$ и $B \rightarrow A = 1$
- 3) отсюда по таблице истинности операции «импликация» находим, что это может быть в двух случаях:
- $B = 0, A = 0, L$ – любое (0 или 1)
 - $B = 1, A = 1, K \cdot L = 0$
- 4) рассмотрим случай «а»: условию $B = M \cdot N = 0$ удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия $A = \bar{J} + K = 0$ сразу получаем, что $J = 1$ и $K = 0$; учитывая, что L – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;
- 5) в случае «б» условие $B = M \cdot N = 1$ сразу дает $M = N = 1$; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана и перепишем третье:
- $$A = \bar{J} + K = 1, K \cdot L = 0$$
- это значит, что при $K = 0$ получаем $J = 0$ и L – любое (2 решения), а при $K = 1$ имеем $L = 0$ и J – любое (еще 2 решения)
- 6) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено $6 + 2 + 2 = 10$ решений
- 7) ответ – **10**.

Возможные проблемы:

- это уравнение требует достаточно сложных преобразований; если вы не уверены в своих теоретических знаниях, лучше составить таблицу истинности (для 5 переменных в ней будет 32 строки) и аккуратно подставить все возможные комбинации переменных
- не всегда удастся найти («увидеть») закономерности, позволяющие упростить выражение
- нужно проверять, чтобы среди найденных решений не было одинаковых

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \rightarrow (\neg J \vee K)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, использование свойств импликации):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
- 3) учитывая, что $J \rightarrow K = \bar{J} + K$, и выполняя замены $A = \bar{J} + K$ и $B = M \cdot N \cdot L$, получаем
- $$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) \cdot (M \rightarrow J) = 1.$$

- 4) рассмотрим последнюю импликацию, которая должна быть равна 1: $M \rightarrow J = 1$; по таблице истинности импликации сразу находим, что возможны три варианта:

- $M = J = 0$
- $M = 0, J = 1$
- $M = J = 1$

- 5) поскольку все (в том числе и первые две) импликации должны быть равны 1, по таблице истинности импликации сразу определяем, что $A = B$, то есть

$$\bar{J} + K = M \cdot N \cdot L$$

- 6) в случае «а» последнее уравнение превращается в $1 + K = 0$ и не имеет решений
- 7) в случае «б» имеем $K = 0$, тогда как N и L – произвольные; поэтому есть 4 решения, соответствующие четырем комбинациям N и L
- 8) в случае «в» получаем $K = N \cdot L$, то есть для $K = 1$ есть единственное решение ($N = L = 1$), а для $K = 0$ – три решения (при $N = L = 0$; $N = 1$ и $L = 0$; $N = 0$ и $L = 1$)
- 9) проверяем, что среди решений, полученных в п. 7 и 8 нет одинаковых
- 10) таким образом, всего есть $4 + 1 + 3 = 8$ решений
- 11) ответ – **8**

Решение (вариант 2, использование свойств импликации, А.М. Фридлянд, УГАТУ):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
- 3) учитывая, что $J \rightarrow K = \bar{J} + K$, и выполняя замены $A = \bar{J} + K$ и $B = M \cdot N \cdot L$, получаем

$$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) \cdot (M \rightarrow J) = 1.$$

- 4) преобразуем первые две скобки:

$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{B} + A) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = (A \equiv B)$, где знак \equiv означает операцию «эквивалентность». Так как это выражение должно быть истинным, значения A и B совпадают. Поэтому исходное уравнение распадается на 2 случая:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} J \rightarrow K = 0 \\ M \cdot N \cdot L = 0 \\ M \rightarrow J = 1 \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} J \rightarrow K = 1 \\ M \cdot N \cdot L = 1 \\ M \rightarrow J = 1 \end{cases} \end{array}$$

- 5) В случае а) из первого уравнения сразу получаем, что $\begin{cases} J = 1 \\ K = 0 \end{cases}$. Тогда третье уравнение

справедливо при любом M , а второе имеет 7 решений (любое, кроме $M = N = L = 1$).

- 6) в случае б) из второго уравнения получаем: $M = N = L = 1$, но тогда из третьего уравнения следует, что $J = 1$ (иначе $M \rightarrow J = 1$), а тогда и $K = 1$ (иначе $J \rightarrow K = 0$).
- 7) таким образом, всего есть $7 + 1 = 8$ решений
- 8) ответ – **8**

Решение (вариант 3, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) идея заключается в том, что мы выбираем одну какую-нибудь переменную и отдельно рассматриваем случаи, когда она равна 0 и 1; такой подход, когда большая задача разбивается на несколько более простых, называют *декомпозицией*
- 3) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
- 4) например, пусть $M = 0$; тогда требуется, чтобы $M \rightarrow J = 0 \rightarrow J = 1$, по таблице истинности импликации получается, что при этом J может быть любое («из лжи следует что угодно»);
 - 5) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты $J = 0$ и $J = 1$
 - 6) при $M = 0$ и $J = 0$ получаем

$$[(0 \rightarrow K) \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow 1] = 1$$

это равенство истинно, если $0 \rightarrow K = 0$, а такого не может быть, то есть в этом случае решений нет

7) при $M = 0$ и $J = 1$ получаем

$$[(1 \rightarrow K) \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow K] = 1$$

это равенство истинно только при $K = 0$ (иначе первая скобка равна нулю), но у нас никак не ограничены значения L и N поэтому получается, что при $M = 0$ и $J = 1$ есть **4 решения** (при $K = 0$ и всех 4-х различных комбинациях L и N)

8) теперь проверяем вариант, когда $M = 1$; при этом

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (1 \rightarrow J) = 1$$

так как должно быть $1 \rightarrow J = 1$, по таблице истинности операции импликация сразу получаем $J = 1$ и уравнение преобразуется к виду

$$[(1 \rightarrow K) \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow K] = 1$$

9) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты $K = 0$ и $K = 1$

10) при $K = 0$ получаем $[0 \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow 0] = 1$, откуда сразу следует, что $N \cdot L = 0$
(**3 решения**: $N = L = 0$; $N = 1, L = 0$ и $N = 0, L = 1$)

11) при $K = 1$ получаем $[1 \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow 1] = 1$, откуда сразу следует, что $N \cdot L = 1$
(**1 решение**: $N = L = 1$)

12) таким образом, уравнение всего имеет $4+3+1 = 8$ решений

13) ответ – **8**

Решение (вариант 4, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):

1) та же декомпозиция, но в другом порядке

2) сделаем сначала декомпозицию по J

3) рассмотрим вариант, когда $J = 0$; подставляя это значение в уравнение

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

получаем

$$[(0 \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] \cdot (M \rightarrow 0) = 1$$

4) учитывая, что $0 \rightarrow K = 1$ при любом K («из лжи следует все, что угодно»), находим

$$[1 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] \cdot (M \rightarrow 0) = 1$$

5) отсюда сразу следует, что $M \rightarrow 0 = 1$ и по таблице истинности операции импликация определяем, что $M = 0$; учитывая это, получаем

$$[1 \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow 1] = 1$$

этого не может быть, потому что первая скобка равна нулю; поэтому при $J = 0$ решений нет

6) теперь пусть $J = 1$, тогда $\bar{J} + K = J \rightarrow K = 1 \rightarrow K = K$ и $M \rightarrow J = M \rightarrow 1 = 1$, поэтому остается уравнение

$$[K \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow K] = 1$$

7) выполним декомпозицию по переменной K

8) при $K = 0$ получаем $[0 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 0] = 1$, что верно при условии

$M \cdot N \cdot L = 0$; из всех 8-ми комбинаций значений переменных M , N и L только одна этому условию не удовлетворяет ($M = N = L = 1$), поэтому имеем **7 решений**

9) при $K = 1$ получаем $[1 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] = 1$, что верно при условии

$M \cdot N \cdot L = 1$; из 8-ми комбинаций значений переменных M , N и L только одна ($M = N = L = 1$) удовлетворяет этому условию, поэтому имеем **1 решение**

10) таким образом, уравнение всего имеет $7+1 = 8$ решений

11) ответ – 8

Возможные проблемы:

- при использовании метода декомпозиции важен порядок выбора переменных для разбиения; можно рекомендовать в первую очередь делать декомпозицию по той переменной, которая чаще всего встречается в уравнении
- нужно помнить, что импликация равна нулю только в случае $1 \rightarrow 0$, часто именно это свойство позволяет упростить решение

Решение (вариант 5, комбинированный, Т.Н. Наумова, ХМАО, Пыть-Ях, МОУ СОШ №5):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

2) имеем логическое произведение трех выражений, которое истинно тогда и только тогда, когда каждое выражение истинно; таким образом, нужно решить систему логических уравнений

$$(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L = 1, \quad M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1, \quad M \rightarrow J = 1$$

3) идея состоит в том, чтобы найти все решения одного из уравнений и проверить истинность остальных двух для всех полученных на предыдущем шаге комбинаций значений переменных

4) рассмотрим первое уравнение: $(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L = 1$; оно справедливо в двух случаях:а) $J \rightarrow K = 0$, $M \cdot N \cdot L$ – любое, или $J = 1$, $K = 0$, $L = *$, $M = *$, $N = *$, где звездочка означает, что переменная может принимать значения 0 или 1; всего получается **8 вариантов**б) $J \rightarrow K = 1$, $M \cdot N \cdot L = 1$, что дает ещё **три варианта**: $J = 0$, $K = *$, $L = 1$, $M = 1$, $N = 1$ – два варианта $J = 1$, $K = 1$, $L = 1$, $M = 1$, $N = 1$ – один вариант5) остается проверить истинность второго ($M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1$) и третьего ($M \rightarrow J = 1$) равенств для этих 11 вариантов; сразу видим, что импликация $M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)$ ложна только тогда, когда $M \cdot N \cdot L = 1$, $\bar{J} + K = 0$, то есть для комбинации (10111), а импликация $M \rightarrow J$ ложна для $M = 1$, $J = 0$ при любых значениях остальных переменных:

J	K	L	M	N	$M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1$	$M \rightarrow J = 1$	
1	0	0	0	0	1	1	✓
1	0	0	0	1	1	1	✓
1	0	0	1	0	1	1	✓
1	0	0	1	1	1	1	✓
1	0	1	0	0	1	1	✓
1	0	1	0	1	1	1	✓
1	0	1	1	0	1	1	✓
1	0	1	1	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	✓

6) таким образом, остается 8 вариантов, отмеченных галочками справа от таблицы

7) ответ – 8

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, упрощение выражения):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [(J \cdot \bar{K}) \rightarrow \overline{M \cdot N \cdot L}] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) попытаемся использовать замену переменных

$$A = J \rightarrow K = \bar{J} + K, \quad B = M \cdot N \cdot L$$

- 3) тогда $J \cdot \bar{K} = \overline{\bar{J} + K} = \overline{J \rightarrow K} = \bar{A}$

- 4) с учетом этих обозначений преобразуем исходное уравнение к виду:

$$(A \rightarrow B) \cdot (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 5) раскрываем импликации по правилу $A \rightarrow B = \bar{A} + B$:

$$(\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (\bar{M} + J) = 1$$

- 6) перемножаем первые две скобки, учитывая, что $A \cdot \bar{A} = B \cdot \bar{B} = 0$:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot (\bar{M} + J) = 1$$

- 7) снова раскрываем скобки

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{M} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot J + A \cdot B \cdot \bar{M} + A \cdot B \cdot J = 1$$

- 8) возвращаемся к исходным переменным, вспоминая, что $\bar{A} = J \cdot \bar{K}$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} \cdot \bar{M} + J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} \cdot J + (\bar{J} + K) \cdot M \cdot N \cdot L \cdot \bar{M} + (\bar{J} + K) \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

- 9) далее используем равенства $M \cdot \bar{M} = J \cdot \bar{J} = 0$ и $J \cdot J = J$, два слагаемых обращаются в нуль:

$$J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} \cdot \bar{M} + J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

- 10) выносим общий множитель из первых двух слагаемых, в скобках остается выражение $\bar{M} + 1 = 1$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} \cdot (\bar{M} + 1) + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

- 11) такие образом, уравнение разбивается на два:

$$J \cdot \bar{K} \cdot \overline{M \cdot N \cdot L} = J \cdot \bar{K} \cdot (\bar{M} + \bar{N} + \bar{L}) = 1 \quad (*)$$

$$K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1 \quad (**)$$

- 12) из уравнения $J \cdot \bar{K} \cdot (\bar{M} + \bar{N} + \bar{L}) = 1$ следует, что $J = 1, K = 0$ и хотя бы одна из переменных M, N, L не равна 1; поэтому уравнение (*) имеет 7 решений (за исключением случая $M = N = L = 1$)

- 13) уравнение (**) имеет единственное решение $J = K = M = N = L = 1$

- 14) среди решений уравнений (*) и (**) нет одинаковых (в первом случае $K = 0$, а во втором $K = 1$), поэтому исходное уравнение имеет $7 + 1 = 8$ решений.

- 15) ответ – **8**.

Задачи для тренировки²:

- 1) Каково наибольшее целое число
- X
- , при котором истинно высказывание

$$(90 < X \cdot X) \rightarrow (X < (X-1))$$

- 2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 3) Укажите значения переменных
- K, L, M, N
- , при которых логическое выражение

$$(\neg K \vee M) \rightarrow (\neg L \vee M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

- 4) Каково наименьшее целое положительное число
- X
- , при котором высказывание:

$$(4 > -(4 + X) \cdot X) \rightarrow (30 > X \cdot X)$$

будет ложным.

- 5) Каково наибольшее целое положительное число
- X
- , при котором истинно высказывание:

$$((X - 1) < X) \rightarrow (40 > X \cdot X)$$

- 6) Укажите значения переменных
- K, L, M, N
- , при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow ((\neg K \wedge \neg M) \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

- 7) Каково наименьшее натуральное число
- X
- , при котором высказывание

$$\neg(X \cdot X < 9) \rightarrow (X > (X + 2))$$

будет ложным?

- 8) Укажите значения логических переменных
- P, Q, S, T
- , при которых логическое выражение

$$(P \vee \neg Q) \vee (Q \rightarrow (S \vee T))$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных P, Q, S, T (в указанном порядке).

- 9) Каково наибольшее целое положительное число
- X
- , при котором высказывание:

$$((X + 6) \cdot X + 9 > 0) \rightarrow (X \cdot X > 20)$$

будет ложным?

- 10) Составьте таблицу истинности для логической функции

² Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2011 гг.
2. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
3. Якушкин П.А., Крылов С.С. ЕГЭ-2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. — М.: Эксмо, 2009.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
5. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
6. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
7. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
8. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
9. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
10. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
11. Тренировочные и диагностические работы МИОО 2010-2011 гг.

$$X = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента B – числа 154, столбец значений аргумента C – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

- 11) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента B – числа 30, столбец значений аргумента C – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

- 12) Известно, что для чисел X , Y и Z истинно высказывание

$$(Z < X \vee Z < Y) \wedge \neg(Z+1 < X) \wedge \neg(Z+1 < Y)$$

Чему равно Z , если $X=25$ и $Y=48$?

- 13) Укажите значения переменных K , L , M , N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K , L , M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1$, $L=1$, $M=0$, $N=1$.

- 14) Укажите значения переменных K , L , M , N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \wedge (K \rightarrow \neg M) \wedge (\neg K \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge N))$$

истинно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K , L , M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1$, $L=1$, $M=0$, $N=1$.

- 15) A , B и C – целые числа, для которых истинно высказывание:

$$(C < A \vee C < B) \wedge \neg(C+1 < A) \wedge \neg(C+1 < B)$$

Чему равно C , если $A=45$ и $B=18$?

- 16) Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$$

где J , K , L , M , N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J , K , L , M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 17) A , B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((B < A) \rightarrow (2C > A)) \wedge ((A < B) \rightarrow (A > 2C))$$

Чему равно A , если $C = 8$ и $B = 18$?

- 18) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L) \vee (M \wedge N) = 1$$

где K , L , M , N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K , L , M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 19) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 100) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 100)$$

- 20) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(8 \cdot X - 6 < 75) \rightarrow (X \cdot (X-1) > 65)$$

- 21) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 55) \rightarrow (X \cdot X > 50)$$

22) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot (X+1) \leq X \cdot X + 7)$$

23) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L \vee M) \wedge (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

24) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \rightarrow (\neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

25) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L) \wedge (M \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

26) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((A \rightarrow B) \wedge C) \vee (D \wedge \neg D) = 1,$$

где A, B, C, D – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений A, B, C, D , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

27) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 55) \rightarrow (X \cdot X > 50)$$

28) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot (X+1) \leq X \cdot X + 7)$$

29) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 7 > 15) \rightarrow (X \cdot X + 8 < 35)$$

30) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(9 \cdot X + 5 > 60) \rightarrow (X \cdot X > 80)$$

31) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg M \wedge K \wedge \neg N \wedge \neg J \wedge (L \vee \neg L) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

32) Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 100) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 100)$$

33) Укажите значения переменных K, L, M, N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow \neg M) \vee (\neg L \wedge M \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

34) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(\neg K \vee \neg L \vee \neg M) \wedge (L \vee \neg M \vee \neg N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

35) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow (\neg M \vee \neg N)) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee K \vee L) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

36) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \vee K \vee L) \rightarrow \neg(M \rightarrow N)) \wedge ((\neg J \wedge \neg K \wedge \neg L) \rightarrow (\neg M \vee N)) \wedge (M \vee \neg N \vee K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

37) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (L \wedge M \wedge N)) \vee \neg((L \wedge M \wedge N) \rightarrow (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge J) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

38) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow ((\neg K \wedge \neg M) \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

39) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((K \wedge \neg L \wedge \neg N) \rightarrow (\neg L \rightarrow M)) \vee ((\neg K \vee L \vee N) \rightarrow (\neg L \wedge \neg M))) \wedge (K \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

40) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((\neg K \rightarrow M) \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge \neg N)) \vee ((\neg K \wedge \neg M) \rightarrow (\neg M \vee L \vee N))) \wedge (L \wedge M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

41) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (C = B)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C = A))$$

Чему равно B, если A = 45 и C = 18?

42) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge P) = 1$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

43) Каково наименьшее целое положительное число X, при котором ложно высказывание:

$$(82 < X \cdot X) \rightarrow (81 > (X-1) \cdot (X-1))$$

44) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \wedge Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee P) = 0$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

45) Каково наименьшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) < 50) \rightarrow (X \cdot X > 35)$$

46) Каково наибольшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 99) \rightarrow (X \cdot X < 65)$$

47) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$(|X| \geq 5) \vee (|X| < 1)$$

48) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$\neg((|X| < 5) \wedge (|X| < 1) \wedge (|X| < 10))$$

49) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$((X-4) \cdot (X-6) \geq 0) \rightarrow (X \cdot X - 12 \cdot X + 35 > 0)$$

50) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \rightarrow K) \wedge \neg(L \rightarrow M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

51) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(J \rightarrow L) \wedge (K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \wedge (L \rightarrow M) \wedge (M \rightarrow K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

52) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$$

$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$$

$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$$

$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

53) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_8) \vee (X_7 \equiv X_9) = 1$$

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

54) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

55) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \equiv X_2) \vee (X_1 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) \vee (X_2 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_{10}) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

$$(X_1 \equiv X_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

56) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \vee (X_3 \equiv X_4)) \wedge (\neg(X_1 \equiv X_2) \vee \neg(X_3 \equiv X_4)) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) \vee (X_5 \equiv X_6)) \wedge (\neg(X_3 \equiv X_4) \vee \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$

$$((X_5 \equiv X_6) \vee (X_7 \equiv X_8)) \wedge (\neg(X_5 \equiv X_6) \vee \neg(X_7 \equiv X_8)) = 1$$

$$((X_7 \equiv X_8) \vee (X_9 \equiv X_{10})) \wedge (\neg(X_7 \equiv X_8) \vee \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

57) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$\neg(X_2 \equiv X_3) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$\neg(X_8 \equiv X_9) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

58) Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(X_1 \vee \neg X_2) \wedge (X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_5) \wedge (\neg X_5 \vee \neg X_6) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_6 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

59) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$

$$(\neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_2 \wedge X_3 \wedge \neg X_4) \vee (X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

...

$$(\neg X_7 \wedge \neg X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_7 \wedge X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_7 \wedge \neg X_8 \wedge \neg X_9) = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_9 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 60) (<http://ege.yandex.ru/informatics>) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 1$$

где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 61) (С.Э. Назаренко, МОУ СОШ №7 г.Ноябрьска) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 0$$

где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 62) (С.Э. Назаренко) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow \neg x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(\neg y_1 \rightarrow \neg y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow \neg y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \wedge y_1 = 1$$

где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 63) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_5 \wedge y_5 = 0$$

где $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 64) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \wedge x_4 = 1$$

$$x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \wedge x_6 = 1$$

$$x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \wedge x_8 = 1$$

$$x_7 \vee \neg x_8 \vee \neg x_9 \wedge x_{10} = 1$$

где x_1, x_2, \dots, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.