B8 (повышенный уровень, время – 2 мин)

Тема: Кодирование чисел. Системы счисления.

Что нужно знать:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
- чтобы перевести число, скажем, 12345_N, из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

  4 3 2 1 0 ← разряды

  $$1\ 2\ 3\ 4\ 5_N = 1\cdot N^4 + 2\cdot N^3 + 3\cdot N^2 + 4\cdot N^1 + 5\cdot N^0$$

  $N^0 = 1$
- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2, и т.д.

Пример задания:

Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание этой системы счисления N.

Решение:

1) поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1, то есть при некотором целом k имеем

$$k\cdot N + 1 = 67 \;\Rightarrow\; k\cdot N = 66$$

2) следовательно, основание N – это делитель числа 66
3) с другой стороны, запись числа содержит 4 цифры, то есть

$$1000_N \le 67 < 10000_N \quad\Rightarrow\quad N^3 \le 67 < N^4$$

4) выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел:

$$2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,\ 5^3 = 125, \ldots$$

$$2^4 = 16,\ 3^4 = 81, \ldots$$

5) видим, что из этого списка только для числа N = 3 выполняется условие $N^3 \le 67 < N^4$
6) таким образом, верный ответ – 3.
7) можно сделать проверку, переведя число 67 в троичную систему $\mathbf{67_{10} = 2111_3}$

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11?

Общий подход:

- вспомним алгоритм перевода числа из десятичной системы в систему с основанием N (см. презентацию), из него следует, что младшая цифра результата – это остаток от деления исходного числа на N, а две младших цифры – это остаток от деления на N^2 и т.д.
- в данном случае $N = 4$, остаток от деления числа на $N^2 = 16$ должен быть равен $11_4 = 5$
- потому задача сводится к тому, чтобы определить все числа, которые меньше или равны 25 и дают остаток 5 при делении на 16

Решение (вариант 1, через десятичную систему):

8) общий вид чисел, которые дают остаток 5 при делении на 16:

$$k\cdot 16 + 5$$

где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …)

9) среди всех таких чисел нужно выбрать те, что меньше или равны 25 («не превосходят 25»); их всего два: 5 (при $k=0$) и 21 (при $k=1$)
10) таким образом, верный ответ – 5, 21 .

Возможные ловушки и проблемы:
- выражение «не превосходящие X » означает «меньшие или равные X », а не строго меньшие X
- остаток, состоящий из нескольких цифр (здесь – 11_4), нужно не забыть перевести в десятичную систему
- найденные числа нужно записать именно в порядке возрастания, как требуется

Решение (вариант 2, через четверичную систему, предложен О.А. Тузовой):
1) переведем 25 в четверичную систему счисления: 25 = 121_4, все интересующие нас числа не больше этого значения
2) из этих чисел выделим только те, которые заканчиваются на 11, таких чисел всего два: это 11_4 = 5 и 111_4 = 21
3) таким образом, верный ответ – 5, 21 .

Возможные ловушки и проблемы:
- есть риск случайно «забыть» какое-то число или найти «лишнее» (в данном случае – большее 25)
- можно сделать ошибки при переводе чисел из четверичной системы в десятичную или вообще «забыть» перевести

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 23 оканчивается на 2.

Общий подход:
- здесь обратная задача – неизвестно основание системы счисления, мы обозначим его через N
- поскольку последняя цифра числа – 2, основание должно быть больше 2, то есть $N > 2$
- вспомним алгоритм перевода числа из десятичной системы в систему с основанием N (см. презентацию), из него следует, что младшая цифра результата – это остаток от деления исходного числа на N

Решение:
1) итак, нужно найти все целые числа $N \geq 3$, такие что остаток от деления 23 на N равен 2, или (что то же самое)
$$23 = k \cdot N + 2 \qquad (*)$$
где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …);
2) сложность в том, что и k, и N неизвестны, однако здесь нужно «играть» на том, что это *натуральные числа*
3) из формулы (*) получаем $k \cdot N = 21$, так что задача сводится к тому, чтобы найти все делители числа 21, которые больше 2
4) в этой задаче есть только три таких делителя: $\mathrm{N} = 3,\ 7$ и 21
5) таким образом, верный ответ – 3, 7, 21 .

Возможные ловушки и проблемы:
- нужно учесть, что основание системы счисления должно быть *больше* любой цифры числа, поэтому делитель $N=1$ не подходит (должно быть $N>2$)
- числа нужно записывать в ответе в порядке возрастания, как требуется по условию

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 *оканчивается на* 11.

Общий подход:
- неизвестно основание системы счисления, мы обозначим его через N
- пока будем считать, что запись числа 31 в системе с основанием N состоит из трех цифр, причем две младшие (11) нам даны, а одну (обозначим ее через k) нужно найти:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 2\;\;1\;\;0 \leftarrow \text{разряды} \\ \mathbf{31 = k\;1\;1_N = k\cdot N^2 + N^1 + N^0 = k\cdot N^2 + N + 1} \end{array}$$

- можно показать, что при большем количестве разрядов эта формула также верна, то есть, число 31 можно представить как $31 = k\cdot N^2 + N + 1$ при некотором целом k; например, для числа с пятью разрядами получаем:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 4\;\;3\;\;2\;\;1\;\;0 \leftarrow \text{разряды} \\ \mathbf{31 = k_4\;k_3\;k_2\;1\;1_N = k_4\cdot N^4 + k_3\cdot N^3 + k_2\cdot N^2 + N^1 + N^0} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{= k\cdot N^2 + N + 1} \end{array}$$

для $k = k_4\cdot N^2 + k_3\cdot N + k_2$ (из первых трех слагаемых вынесли общий множитель N^2)

Решение:
1) итак, нужно найти все целые числа $N \geq 2$, такие что
$$31 = k\cdot N^2 + N + 1 \qquad (**)$$
где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …);
2) сложность в том, что и k, и N неизвестны, однако здесь нужно «играть» на том, что это *натуральные числа*
3) из формулы (**) получаем $(k\cdot N+1)N = 30$, так что задача сводится к тому, чтобы найти все делители N числа 30 и отобрать только те из них, для которых уравнение (**) разрешимо при целом k, то есть, $k = \dfrac{30-N}{N^2}$ – целое число
4) выпишем все делители числа 30, большие или равные 2: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
5) из всех этих делителей только для 2, 3, 5 и 30 значение $k = \dfrac{30-N}{N^2}$ – целое число (оно равно соответственно 7, 3, 1 и 0)
6) таким образом, верный ответ – 2, 3, 5, 30.

Еще пример задания:

Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 10, 11, 12, …, 17 в системе счисления с основанием 5.

Решение (вариант 1):
1) запишем первое и последнее число в заданном диапазоне в системе счисления с основанием 5:

$$10 = 20_5,\quad 17 = 32_5.$$

2) заметим, что оба они содержат цифру 2, так что, 2 цифры мы уже нашли
3) между 20_5 и 32_5 есть еще числа

$$21_5,\ 22_5,\ 23_5,\ 24_5,\ 30_5,\ 31_5.$$

4) в них 5 цифр 2 (в числе 22_5 – сразу две двойки), поэтому всего цифра 2 встречается 7 раз
5) таким образом, верный ответ – 7.

Возможные ловушки и проблемы:
- нужно не забыть, что в системе счисления с основанием 5 старшая цифра – 4, то есть, вслед за 24_5 следует 30_5
- помните, что нужно определить не количество чисел, в которых есть двойка, а количество самих двоек
- можно не обратить внимание на то, что в числе 22_5 цифра 2 встречается 2 раза

Решение (вариант 2):
1) переведем все указанные числа в систему счисления с основанием 5:

$$10 = 20_5,\ 11 = 21_5,\ 12 = 22_5,\ 13 = 23_5,\ 14 = 24_5,\ 15 = 30_5,\ 16 = 31_5,\ \ 17 = 32_5\ .$$

2) считаем цифры 2 – получается 7 штук
3) таким образом, верный ответ – 7 .

Еще пример задания:

Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 трехзначна.

Решение:
1) обозначим через N неизвестное основание системы счисления, тогда запись числа 30 в этой системе имеет вид

$$x\ y\ z_N = 30$$

2) вспомним алгоритм перевода числа из системы счисления с основанием N в десятичную систему: расставляем сверху номера разрядов и умножаем каждую цифру на основание в степени, равной разряду:

$$\overset{2}{x}\ \overset{1}{y}\ \overset{0}{z}_N = x \cdot N^2 + y \cdot N + z = 30$$

3) поскольку запись трехзначная, $x \neq 0$, поэтому $30 \geq N^2$
4) с другой стороны, четвертой цифры нет, то есть, в третьем разряде – ноль, поэтому $30 < N^3$
5) объединяя последние два условия, получаем, что искомое основание N удовлетворяет двойному неравенству

$$N^2 \leq 30 < N^3$$

6) учитывая, что N – целое число, методом подбора находим целые решения этого неравенства; их два – 4 и 5:

$$4^2 = 16 \leq 30 < 4^3 = 64$$
$$5^2 = 25 \leq 30 < 5^3 = 125$$

7) минимальное из этих значений – 4
8) таким образом, верный ответ – 4 .

Решение (без подбора):
1) выполним п.1-4 так же, как и в предыдущем варианте решения
2) найдем первое целое число, куб которого больше 30; это 4, так как

$$3^3 = 27 < 30 < 4^3 = 64$$

3) проверяем второе неравенство: $4^2 = 16 \le 30$, поэтому в системе счисления с основанием 4 запись числа 30 трехзначна
4) таким образом, верный ответ – 4.

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, *запись которых в системе счисления с основанием 5 начинается на 3?*

Решение (вариант 1):

1) нас интересуют числа от 1 до 30
2) сначала определим, сколько цифр может быть в этих числах, записанных в системе счисления с основанием 5
3) поскольку $5^2 < 30 < 5^3$, в интересующих нас числах может быть от 1 до 3 цифр
4) рассмотрим трехзначные числа, начинающиеся на 3 в системе с основанием 5:
$$3xy_5 = 3\cdot 5^2 + x\cdot 5 + y$$
все они заведомо не меньше $3\cdot 5^2 = 75 > 30$, поэтому в наш диапазон не попадают;
5) таким образом, остается рассмотреть только однозначные и двухзначные числа
6) есть всего одно однозначное число, начинающееся на 3, это 3
7) общий вид всех двузначных чисел, начинающихся на 3 в системе с основанием 5:
$$3\cdot 5 + k = 15 + k$$
где k – целое число из множества {0, 1, 2,3,4} (поскольку система счисления имеет основание 5 и цифр, больших 4, в записи числа быть не может)
8) используя эту формулу, находим интересующие нас двузначные числа – 15, 16, 17, 18 и 19
9) таким образом, верный ответ – 3, 15, 16, 17, 18, 19.

Решение (вариант 2, предложен Сенькиной Т.С., г. Комсомольск-на-Амуре):

1) нас интересуют числа от 1 до 30; сначала определим, сколько цифр может быть в пятеричной записи эти чисел
2) поскольку $30 = 110_5$, в интересующих нас числах может быть не более 2 цифр (все трехзначные пятеричные числа, начинающиеся с 3, больше 30)
3) есть всего одно однозначное число, начинающееся на 3, это 3
4) выпишем все пятеричные двузначные числа, которые начинаются с 3, и переведем их в десятичную систему: 30_5 = 15, 31_5 = 16, 32_5 = 17, 33_5 = 18 и 34_5 = 19
5) таким образом, верный ответ – 3, 15, 16, 17, 18, 19.

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 71 оканчивается на 13.

Решение (1 способ):

1) Если число в системе с основанием x оканчивается на 13, то
   а) $x \ge 4$, потому что в системах с меньшим основанием нет цифры 3
   б) это число можно представить в виде $A\cdot x^2 + x + 3$, где A – целое неотрицательное число
2) определим наибольшее возможное A с учетом условия $x \ge 4$. Из уравнения
$A\cdot x^2 + x + 3 = 71$ следует $A = \dfrac{68 - x}{x^2}$.

3) очевидно, что чем меньше x, тем больше A, поэтому значение A не превышает

$$A_{\max} = \frac{68-4}{4^2} = 4$$

здесь мы подставили $x = 4$ – наименьшее допустимое значение x

4) остается перебрать все допустимые значения A (от 0 до $A_{\max} = 4$), решая для каждого из них уравнение

$$A \cdot x^2 + x + 3 = 71 \text{ или равносильное } A \cdot x^2 + x - 68 = 0$$

относительно x, причем нас интересуют только натуральные числа $x \geq 4$

5) получаем
   а) при $A = 0$: $x = 68$
   б) при $A = 1, 2, 3$: решения – не целые числа
   в) при $A = 4$: $x_1 = 4$ и $x_2 = -4{,}25$, второе решение не подходит

6) таким образом, верный ответ: 4, 68.

Решение (2 способ, М.В. Кузнецова и её ученики):

1) запись числа71 в системе с основанием x оканчивается на 13, т.е. в разряде единиц – 3, это значит, что остаток от деления 71 на x равен 3, то есть для некоторого целого k имеем

$$k \cdot x + 3 = 71 \quad \Rightarrow \quad k \cdot x = 68$$

2) таким образом, искомые основания – делители числа 68; остается выбрать из них те, которые соответствуют другим условиям задачи

3) среди чисел, оканчивающихся на 13 в системе счисления с основанием x ,минимальное – это само число 13_x; отсюда найдем максимальное основание:

$$13_x = 1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0 = x + 3 = 71 \quad \Rightarrow \quad x = 68$$

так что первый ответ: 68.

4) остальные числа, окачивающиеся в этой системе на 13, имеют не менее 3-х знаков (113_x, 213_x ...), т.е. все они больше $100_x = x^2$

5) поэтому $71 > x^2$, следовательно, $x < 9$

6) по условию в записи числа есть цифра 3, поэтому $x > 3$ (в системах с основанием ≤ 3 цифры 3 нет)

7) итак: $x \in [4,8]$, и при этом x – делитель 68; единственное возможное значение $x = 4$ (на 5,6,7 и 8 число 68 не делится)

8) таким образом, верный ответ: 4, 68.

Возможные ловушки и проблемы:

- на шаге 1 нужно вычесть из числа только число единиц, то есть младшую из двух заданных цифр (в примере – 3)
- можно забыть рассмотреть двузначное число, записанное заданными в условии цифрами (в примере – 13_x), и пропустить максимальное основание
- нужно помнить, что
   а) максимальная цифра на 1 меньше основания системы счисления
   б) 100 в системе с основанием ***p*** равно ***p***^{2}

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 86 оканчивается на 22.

Решение (1 способ):

1) Если число в системе с основанием x оканчивается на 22, то
   а) $x \ge 3$, потому что в системах с меньшим основанием нет цифры 3
   б) это число можно представить в виде $A \cdot x^2 + 2x + 2$, где A – целое неотрицательное число
2) определим наибольшее возможное A с учетом условия $x \ge 3$. Из уравнения $A \cdot x^2 + 2x + 2 = 86$ следует $A = \dfrac{84 - x}{x^2}$.
3) очевидно, что чем меньше x, тем больше A, поэтому значение A не превышает
   $A_{\max} = \dfrac{84-3}{3^2} = 9$
   здесь мы подставили $x = 3$ – наименьшее допустимое значение x
4) остается перебрать все допустимые значения A (от 0 до $A_{\max} = 9$), решая для каждого из них уравнение
   $$A \cdot x^2 + 2x + 2 = 86 \text{ или равносильное } A \cdot x^2 + 2x - 84 = 0$$
   относительно x, причем нас интересуют только натуральные числа $x \ge 3$
5) получаем
   а) при $A = 0$: $x = 42$
   б) при $A = 1$: решения – не целые числа
   в) при $A = 2$: $x = 6$ и $x_2 = -7$, второе решение не подходит
   г) при $A = 3,4,5,6,7,8,9$: решения – не целые числа
6) таким образом, верный ответ: 6, 42.

Решение (2 способ, М.В. Кузнецова и её ученики):

1) запись числа 86 в системе с основанием x оканчивается на 22, т.е. в разряде единиц – 2, это значит, что остаток от деления 86 на x равен 2, то есть для некоторого целого k имеем
   $$k \cdot x + 2 = 86 \quad \Rightarrow \quad k \cdot x = 84$$
2) таким образом, искомые основания – делители числа 84; остается выбрать из них те, которые соответствуют другим условиям задачи
3) среди чисел, оканчивающихся на 22 в системе счисления с основанием x ,минимальное – это само число 22_x; отсюда найдем максимальное основание:
   $$22_x = 2 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 = 2x + 2 = 86 \quad \Rightarrow \quad x = 42$$
   так что первый ответ: 42.
4) остальные числа, окачивающиеся в этой системе на 22, имеют не менее 3-х знаков (122_x, 222_x ...), т.е. все они больше $100_x = x^2$
5) поэтому $86 > x^2$, следовательно, $x < 10$
6) по условию в записи числа есть цифра 2, поэтому $x > 2$
7) итак: $x \in [3,9]$, и при этом x – делитель 84; возможные значения $x = 3, 4, 6, 7$ (на 5,8 и 9 число 84 не делится)
8) переводя число 86 в системы счисления с основаниями $x = 3, 4, 6, 7$, находим, что только для основания 6 запись числа оканчивается на 22 (при делении на 3, 4 и 7 «вторые» остатки не равны 2):

86	3	
84	28	3
2	27	9...
	1	

Дальше делить нет смысла

86	4	
84	21	4
2	20	5...
	1	

86	**6**	
84	**14**	**6**
2	**12**	**2**
	2	

86	7	
84	12	7
2	7	1
	5	

9) таким образом, верный ответ: 6, 42.

Еще пример задания:

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 94 начинается на 23.

Решение:

1) Из условия сразу видно, что искомое основание не меньше 4 (в записи есть цифра 3).
2) Если запись числа 94 в некоторой системе счисления с основанием x двузначна ($94 = 23_x$), то справедливо равенство $94 = 2x^2 + 3$; нас интересуют натуральные решения этого уравнения, такие что $x \geq 4$, таких решений нет.
3) Предположим, что число четырехзначное. Минимальное допустимое четырехзначное число – 2300_x, где $x \geq 4$. При минимальном основании ($x = 4$) оно равно $2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 = 176 > 94$, поэтому запись нужного нам числа имеет не больше трех знаков.
4) На основании (2) и (3) делаем вывод, что число трехзначное, то есть $94 = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + M$, где M – целое неотрицательное число, такое что $M < x$.
5) Максимальное x можно определить как решение уравнения $94 = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$ (при $M = 0$); получаем одно из решений 6,15, поэтому $x \leq 6$
6) Если мы знаем x, то M определится как $M = 94 - 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x$; пробуем подставлять в эту формулу $x = 4, 5, 6$, пытаясь получить $M < x$
7) Минимальное M будет при $x = 6$: $M = 4$, а при $x = 4, 5$ получается $M > x$
8) Таким образом, верный ответ: 6.

Еще пример задания:

Найти сумму восьмеричных чисел $17_8 + 170_8 + 1700_8 + ... + 1700000_8$, перевести в 16-ую систему счисления. Найдите в записи числа, равного этой сумме, третью цифру слева.

Решение:

1) Несложно выполнить прямое сложение восьмеричных чисел, там быстро обнаруживается закономерность:
   $17_8 + 170_8 = 207_8$
   $17_8 + 170_8 + 1700_8 = 2107_8$
   $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 = 21107_8$
   $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 = 211107_8$
   $17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 + 1700000_8 = 2111107_8$
2) Переведем последнюю сумму через триады в двоичный код (заменяем каждую восьмеричную цифру на 3 двоичных):
   10001001001001000111_2
3) Теперь разбиваем цепочку на тетрады (группы из 4-х двоичных цифр), начиная справа, и каждую тетраду представляем в виде шестнадцатеричной цифры
   10001001001001000111_2
   8 9 2 4 7
4) Таким образом, верный ответ (третья цифра слева): 2.

Еще пример задания:

Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x, при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

Решение:

1) Поскольку в левой и в правой частях есть цифра 5, оба основания больше 5, то есть перебор имеет смысл начинать с $x = x_{\min} = 6$.
2) Очевидно, что $x > y$, однако это не очень нам поможет.
3) Для каждого «подозреваемого» x вычисляем значение $225_x = 2 \cdot x^2 + 2x + 5 = N$ и решаем уравнение $N = 405_y = 4 \cdot y^2 + 5$, причем нас интересуют только натуральные $y > 5$.
4) Для $x = 6$ и $x = 7$ нужных решений нет, а для $x = 8$ получаем
   $N = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 5 = 149 = 4 \cdot 6^2 + 5$
   так что $y = 6$.
5) Таким образом, верный ответ (минимальное значение x): 8.

Еще пример задания:

Запись числа 30_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 0 и содержит 4 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N?

Решение (1 способ, подбор):

1) запись числа 30 в системе с основанием N длиннее, чем в десятичной (4 цифры против двух), поэтому основание N меньше 10
2) это дает шанс решить задачу методом подбора, переводя в разные системы, начиная с N = 2 до N = 9
3) переводим:
   $30 = 11110_2 = 1010_3 = \ldots$
4) дальше можно не переводить, поскольку запись 1010_3 удовлетворяет условию: заканчивается на 0 и содержит 4 цифры
5) можно проверить, что при N ≥ 4 запись числа 30 содержит меньше 4 цифр, то есть не удовлетворяет условию
6) Ответ: 3.

Решение (2 способ, неравенства):

1) запись числа 30 в системе с основанием N содержит ровно 4 цифры тогда и только тогда, когда старший разряд – третий, то есть
   $N^3 \le 30 < N^4$
2) первая часть двойного неравенства $N^3 \le 30$ дает (в целых числах) $N \le 3$
3) вторая часть неравенства $30 < N^4$ дает (в целых числах) $N \ge 3$
4) объединяя результаты пп. 2 и 3 получаем, что N = 3
5) заметим, что условие «оканчивается на 0» – лишнее, ответ однозначно определяется по количеству цифр
6) Ответ: 3.

Задачи для тренировки[1]:

1) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 22 оканчивается на 4.
2) В системе счисления с некоторым основанием число 12 записывается в виде 110. Укажите это основание.
3) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 39 оканчивается на 3.
4) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 29 оканчивается на 5.
5) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается как 1004. Укажите это основание.
6) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 40 оканчивается на 4.
7) В системе счисления с некоторым основанием число десятичное 25 записывается как 100. Найдите это основание.
8) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 27 оканчивается на 3.
9) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 26, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 22?
10) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, запись которых в четверичной системе счисления оканчивается на 31?
11) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные натуральные числа, не превосходящие 17, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры?
12) Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 19, 20, 21, ..., 33 в системе счисления с основанием 6.
13) Укажите, сколько всего раз встречается цифра 1 в записи чисел 12, 13, 14, ..., 31 в системе счисления с основанием 5.
14) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 23 оканчивается на 1.
15) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 63 оканчивается на 23.
16) Десятичное число, переведенное в восьмеричную и в девятеричную систему, в обоих случаях заканчивается на цифру 0. Какое минимальное натуральное число удовлетворяет этому условию?
17) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 49 записывается в виде 100. Укажите это основание.

---

[1] Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2011 гг.
2. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
3. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. Информатика: тренировочные задания. – М.: Эксмо, 2009.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М: Экзамен, 2010.
5. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ-2010. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / под ред. В.Р. Лещинера / ФИПИ. — М.: Интеллект-центр, 2010.
6. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
7. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. – М.: НИИ школьных технологий, 2010.
8. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.

18) Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 70 трехзначна.
19) Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 50 двузначна.
20) Сколько значащих цифр в записи десятичного числа 357 в системе счисления с основанием 7?
21) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием 6 начинается на 4?
22) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 20, запись которых в системе счисления с основанием 3 начинается на 2?
23) Какое десятичное число при записи в системе счисления с основанием 5 представляется как 1234_5?
24) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 101?
25) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 30 оканчивается на 8.
26) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 оканчивается на 4.
27) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 83 записывается в виде 123. Укажите это основание.
28) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 144 записывается в виде 264. Укажите это основание.
29) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 32 оканчивается на 4.
30) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 27, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 110?
31) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 21?
32) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 45, запись которых в двоичной системе счисления оканчивается на 1010?
33) Десятичное число кратно 16. Какое минимальное количество нулей будет в конце этого числа после перевода его в двоичную систему счисления?
34) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание.
35) Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 13, 14, 15, …, 23 в системе счисления с основанием 4.
36) Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 13, 14, 15, …, 23 в системе счисления с основанием 3.
37) В саду 100 фруктовых деревьев – 14 яблонь и 42 груши. Найдите основание системы счисления, в которой указаны эти числа.
38) Найдите основание системы счисления, в которой выполнено сложение: 144 + 24 = 201.
39) Найдите основание системы счисления, в которой выполнено умножение: $3 \cdot 213 = 1043$.
40) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 20, запись которых в системе счисления с основанием 5 оканчивается на 3?
41) Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 100, запись которых в системе счисления с основанием 5 оканчивается на 11?
42) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 75 оканчивается на 13.
43) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 84 оканчивается на 14.

44) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 61 оканчивается на 15.
45) Найдите десятичное число x, такое что 20 < x < 30, запись которого в системе счисления с основанием 3 заканчивается на 11.
46) Запись числа 65_8 в некоторой системе счисления выглядит так: 311_q. Найдите основание системы счисления q.
47) Запись числа 30 в некоторой системе счисления выглядит так: 110_q. Найдите основание системы счисления q.
48) Запись числа $2B_{16}$ в некоторой системе счисления выглядит так: 111_q. Найдите основание системы счисления q.
49) Запись числа 23 в некоторой системе счисления выглядит так: 212_q. Найдите основание системы счисления q.
50) Запись числа 210_5 в некоторой системе счисления выглядит так: 313_q. Найдите основание системы счисления q.
51) Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 50 трехзначна.
52) Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 34_8 оканчивается на 20.
53) Запись числа 344 в некоторой системе счисления выглядит так: $1A8_q$. Найдите основание системы счисления q.
54) К записи натурального числа в восьмеричной системе счисления справа приписали два нуля. Во сколько раз увеличилось число? Ответ запишите в десятичной системе счисления.