

В9 (высокий уровень, время – 3 мин)

Тема: Графы. Поиск путей

Что нужно знать:

- если в город R можно приехать только из городов X, Y, и Z, то число различных путей из города A в город R равно сумме числа различных путей проезда из A в X, из A в Y и из A в Z, то есть

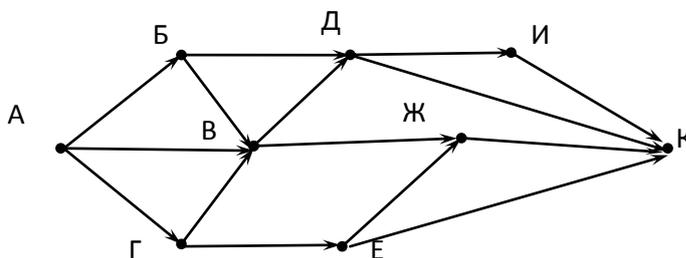
$$N_R = N_X + N_Y + N_Z,$$

где N_Q обозначает число путей из вершины A в некоторую вершину Q

- число путей конечно, если в графе нет циклов – замкнутых путей

Пример задания:

На рисунке – схема дорог, связывающих города A, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города A в город К?



Решение (1 вариант, подстановки):

- 1) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
- 2) будем обозначать через N_X количество различных путей из города A в город X
- 3) общее число путей обозначим через N
- 4) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$
- 5) очевидно, что если в город X можно приехать только из Y, Z, то $N_X = N_Y + N_Z$, то есть нужно сложить число путей, ведущих из A во все города, откуда можно приехать в город X
- 6) поскольку в К можно приехать из Е, Д, Ж или И, поэтому

$$N = N_K = N_Д + N_Е + N_Ж + N_И$$

- 7) в город И можно приехать только из Д, поэтому $N_И = N_Д$
- 8) в город Ж можно приехать только из Е и В, поэтому

$$N_Ж = N_Е + N_В$$

- 9) подставляем результаты пп. 6 и 7 в формулу п. 5:

$$N = N_В + 2N_Е + 2N_Д$$

- 10) в город Д можно приехать только из Б и В, поэтому

$$N_Д = N_Б + N_В$$

так что

$$N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Е$$

- 11) в город Е можно приехать только из Г, поэтому $N_Е = N_Г$ так что

$$N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г$$

- 12) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$, кроме того, $N_В = 1 + N_Б + N_Г = 3$

- 13) окончательно $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 13$

- 14) Ответ: **13**.

Решение (2 вариант, удобная форма записи):

- 1) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К

- 2) записываем для каждой вершины, из каких вершин можно в нее попасть

К ← ИДЖЕ
 И ← Д
 Ж ← ВЕ
 Е ← Г
 Д ← БВ
 Г ← А
 В ← АБГ
 Б ← А

вершина	откуда?
К	ИДЖЕ
И	Д
Ж	ВЕ
Е	Г
Д	БВ
Г	А
В	АБГ
Б	А

- 3) теперь для удобства «обратного хода» вершины можно отсортировать так¹, чтобы сначала шли все вершины, в которые можно доехать только из начальной точки А:

Б ← А
 Г ← А

затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

В ← АБГ
 Е ← Г

далее добавляем все вершины, куда можно доехать из А, Б, Г, В и Е:

Д ← БВ
 Ж ← ВЕ

на следующем шаге добавляем вершину И

И ← Д

и, наконец, конечную вершину

К ← ИДЖЕ

именно в таком порядке мы и будем вычислять количество путей для каждой вершины

вершина	откуда?	N
Б	А	1
Г	А	1
В	АБГ	3
Е	Г	1
Д	БВ	4
Ж	ВЕ	4
И	Д	4
К	ИДЖЕ	13

- 4) теперь идем по полученному списку вершин, полагая, что количество вариантов попасть в вершину равно суммарному количеству вариантов попасть в ее непосредственных предшественников.

$$\begin{aligned}
 N_B &= 1, & N_G &= 1 \\
 N_V &= 1+1+1 = 3, & N_E &= 1 \\
 N_D &= 1+3 = 4, & N_J &= 3 + 1 = 4 \\
 N_I &= 4, \\
 N &= N_K = 4 + 4 + 4 + 1 = 13
 \end{aligned}$$

- 5) заметим, что вершины можно и не сортировать специально, а просто выбирать возможный порядок вычисления: проверять, какие значения известны и какие можно рассчитать с их помощью на следующем шаге
- 6) Ответ: **13**.

Возможные ловушки и проблемы:

- очень важна аккуратность и последовательность; сначала идем от конечной точки к начальной, выписывая все вершины, из которых можно приехать в данную; затем идем обратно, определяя числовые значения

¹ Такая процедура называется *топологической сортировкой графа*.

- построение полного дерева маршрутов – занятие трудоемкое и достаточно бесперспективное, даже грамотные учителя информатики здесь в большинстве случаев что-то забывают и ошибаются

Решение (3 вариант, перебор вершин по алфавиту):

- 1) Запишем вершины в алфавитном порядке и для каждой из них определим, из каких вершин можно в нее попасть

Б ← А
 В ← АБГ
 Г ← А
 Д ← БВ
 Е ← Г
 Ж ← ВЕ
 И ← Д
 К ← ИДЖЕ

вершина	откуда ?
Б	А
В	АБГ
Г	А
Д	БВ
Е	Г
Ж	ВЕ
И	Д
К	ИДЖЕ

- 2) теперь определяем количество путей; сначала ставим 1 для тех вершин, в которые можно проехать только из начальной (А):

вершина	откуда ?	Н
Б	А	1
В	АБГ	
Г	А	1
Д	БВ	
Е	Г	
Ж	ВЕ	
И	Д	
К	ИДЖЕ	

- 3) затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

вершина	откуда ?	Н
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	
Е	Г	1
Ж	ВЕ	
И	Д	
К	ИДЖЕ	

- 4) следующий шаг

вершина	откуда ?	N
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	4
Е	Г	1
Ж	ВЕ	4
И	Д	
К	ИДЖЕ	

5) и последние 2 шага

вершина	откуда ?	N
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	4
Е	Г	1
Ж	ВЕ	4
И	Д	4
К	ИДЖЕ	13

6) Ответ: **13**.

Решение (4 вариант, перебор всех путей с начала, А. Яфарова):

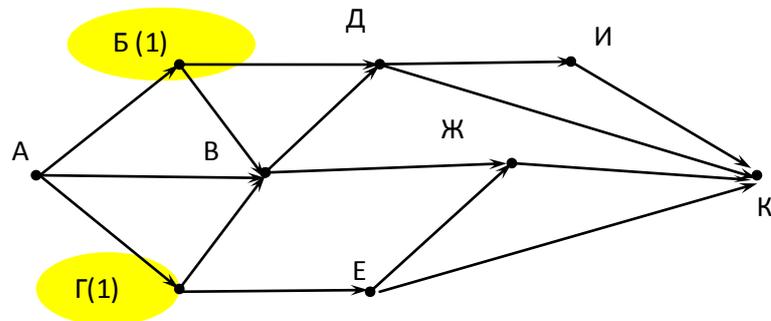
- запишем все вершины, в которые есть прямой путь из вершины А: Б, В и Г; получается три начальных отрезка:
АБ, АВ, АГ
- рассмотрим маршрут АБ: из Б можно ехать в В и Д, поэтому получаем два маршрута:
АБВ, АБД
- рассматриваем конечные точки этих маршрутов: из В можно ехать в Д и Ж, а из Д – в И и К:
АБВД, АБВЖ, АБДИ, АБДК
- снова смотрим на конечные точки: из Д едем в И и К, из Ж и И – только в К:
АБВДИ, АБВДК, АБВЖК, АБДИК, АБДК
- из И едем только в К, таким образом, все возможные маршруты, содержащие участок АБ, доведены до конечной точки К, всего **5 таких маршрутов**:
АБВДИК, АБВДК, АБВЖК, АБДИК, АБДК
- затем аналогично рассматриваем маршруты, которые начинаются с АВ:
АВД, АВЖ
АВДИ, АВДК, АВЖК
АВДИК, АВДК, АВЖК
всего **3 маршрута**
- наконец, остается рассмотреть маршруты, которые начинаются с АГ:
АГВ, АГЕ
АГВД, АГВЖ, АГЕЖ, АГЕК
АГВДИ, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК
АГВДИК, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК
всего **5 маршрутов**
- складываем количество маршрутов для всех начальных участков: $5 + 3 + 5 = 13$
- Ответ: **13**.

Возможные проблемы:

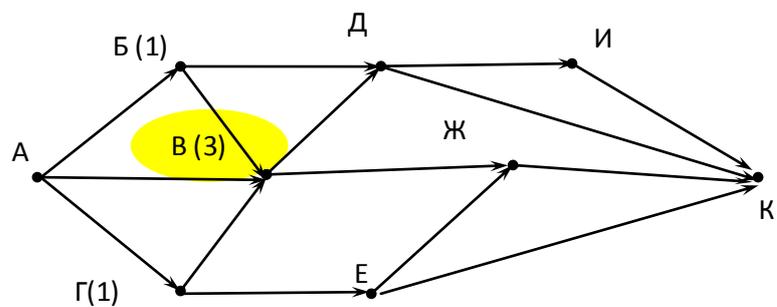
- при большом количестве маршрутов легко запутаться и что-то пропустить

Решение (5 вариант, графический, О.О. Грущак, КузГПА):

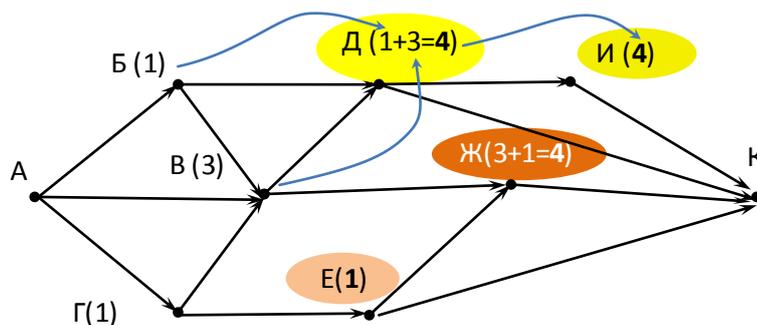
- 1) Главную идею решения: (число дорог в город N есть сумма дорог, приводящих в города, из которых есть прямой проезд в город N), отразим на самой схеме, показывая на ней ЧИСЛО ДОРОГ, приводящих в каждый город.
- 2) Последовательность очевидна: начинаем с Б и Г (городов, куда есть по 1-й дороге из А)



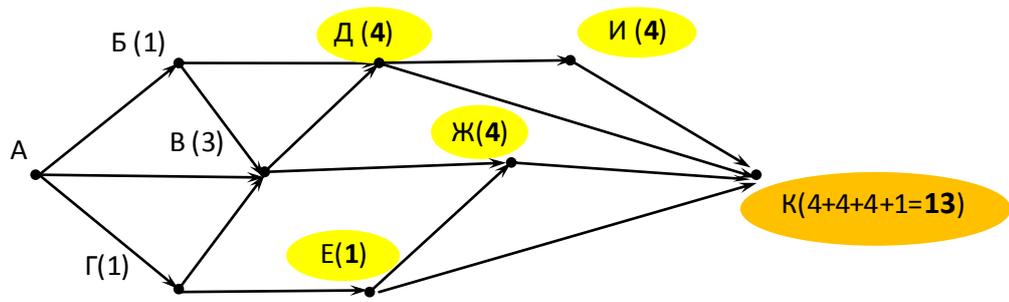
- 3) Посчитаем дороги в В: 1 (из А) + 1 (дороги города Б) + 1 (дороги города Г) = 3



- 4) Аналогично посчитаем дороги в Д, И, Е, Ж:



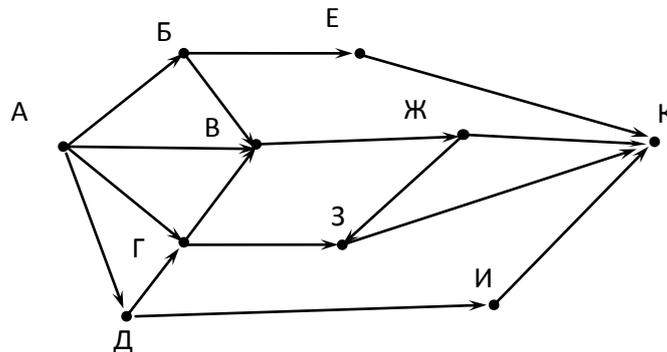
- 5) Определяем число дорог в город К, как сумму дорог в города, с которыми он связан: Д, И, Ж, Е.



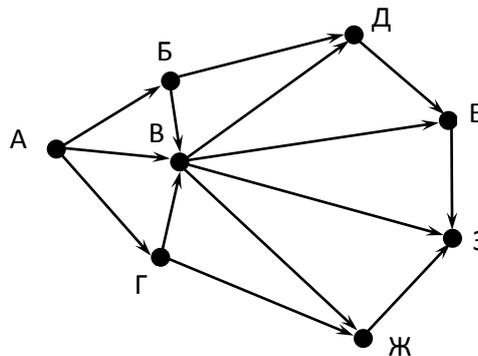
б) Ответ: 13.

Задачи для тренировки²:

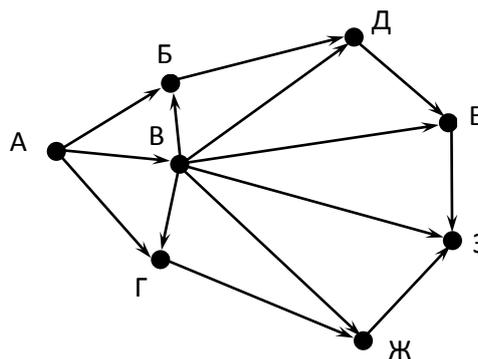
- 1) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



- 2) рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?



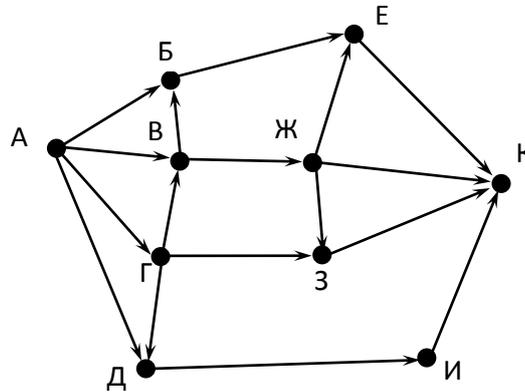
- 3) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?



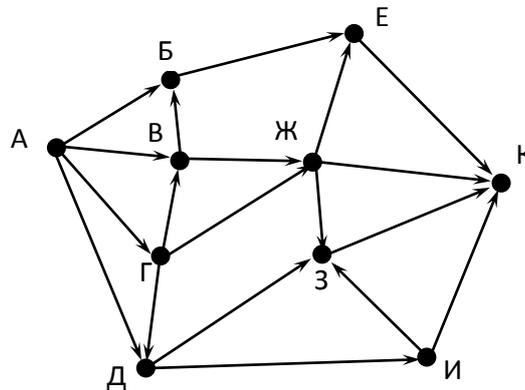
- 4) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?

² Источники заданий:

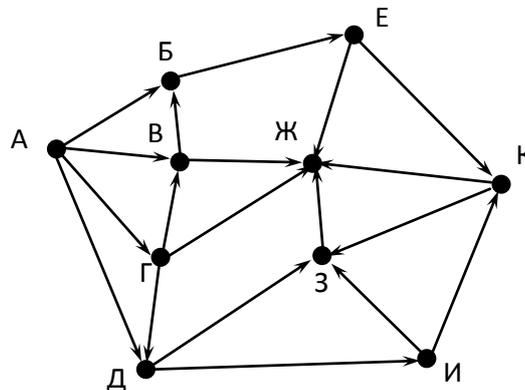
1. Тренировочные работы МИОО 2011-2012.
2. Авторские разработки.



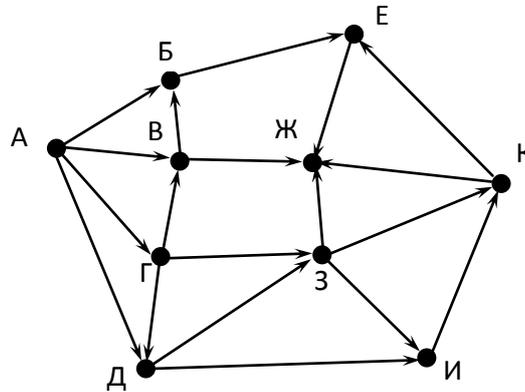
- 5) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



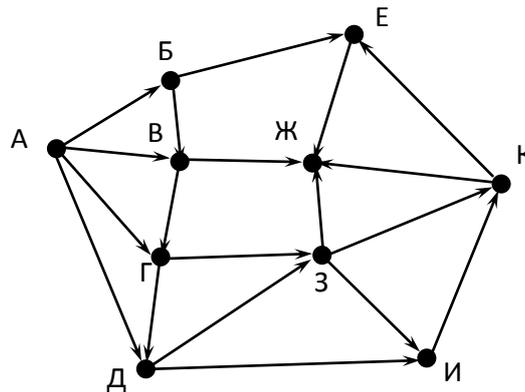
- 6) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



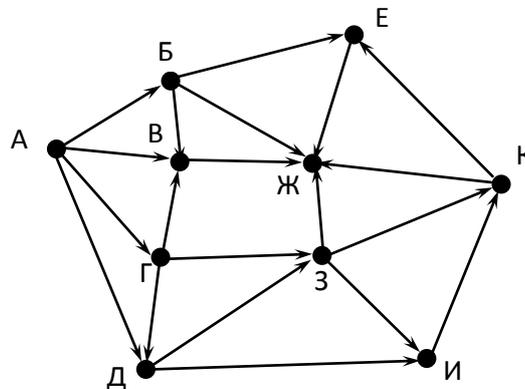
- 7) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



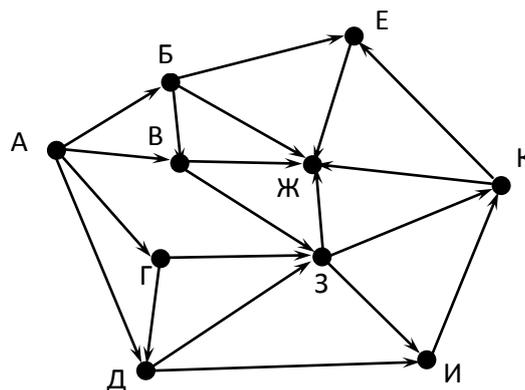
- 8) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



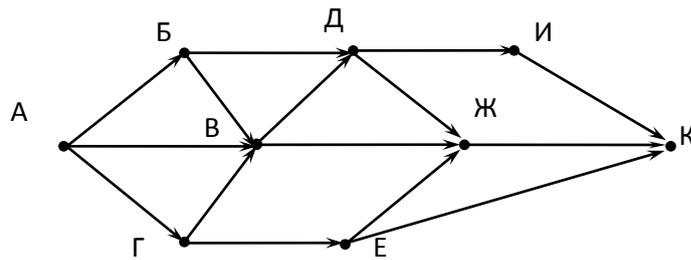
- 9) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



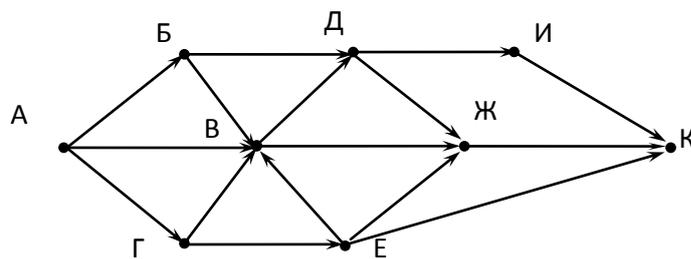
- 10) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



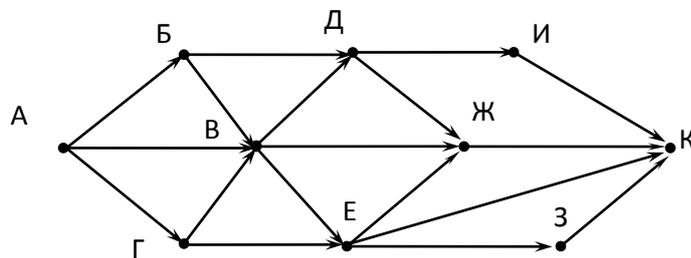
- 11) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



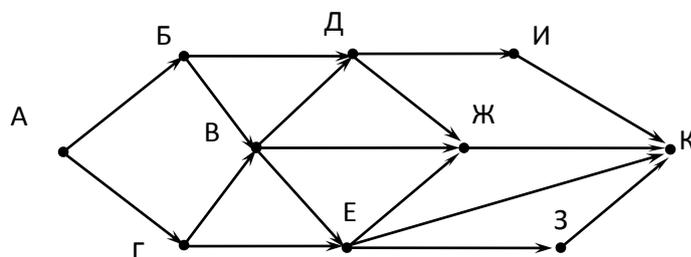
- 12) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



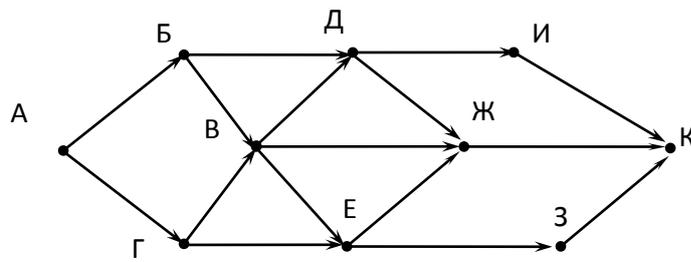
- 13) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



- 14) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



- 15) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



- 16) На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?

