

С3 (высокий уровень, время – 30 мин)

Тема: динамическое программирование.

Что нужно знать:

- динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем сведения их к более простым задачам того же типа
- с помощью динамического программирования решаются задачи, которые требуют полного перебора вариантов:
 - «подсчитайте количество вариантов...»
 - «как оптимально распределить...»
 - «найдите оптимальный маршрут...»
- динамическое программирование позволяет ускорить выполнение программы за счет использования дополнительной памяти; полный перебор не требуется, поскольку запоминаются решения всех задач с меньшими значениями параметров

Пример задания:

У исполнителя Утроитель две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – утраивает его.

Программа для Утроителя – это последовательность команд.

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 20?

Ответ обоснуйте.

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) начнем с простых случаев, с которых будем начинать вычисления: для чисел 1 и 2, меньших, чем 3, существует только одна программа, состоящая только из команд сложения; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из 1, то $K_1 = K_2 = 1$.
- 3) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_N , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 4) если число N не делится на 3, то оно могло быть получено только последней операцией сложения, поэтому $K_N = K_{N-1}$
- 5) если N делится на 3, то последней командой может быть как сложение, так и умножение
- 6) поэтому для получения K_N нужно сложить K_{N-1} (количество программ с последней командой сложения) и $K_{N/3}$ (количество программ с последней командой умножения). В итоге получаем:

если N не делится на 3: $K_N = K_{N-1}$

если N делится на 3: $K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$

- 7) остается заполнить таблицу для всех значений от 1 до N :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K_N	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

- 8) Заметим, что количество вариантов меняется только в тех столбцах, где N делится на 3, поэтому из всей таблицы можно оставить только эти столбцы:

N	1	3	6	9	12	15	18	21
K_N	1	2	3	5	7	9	12	15

- 9) заданное число 20 попадает в последний интервал (от 18 до 21), поэтому ...
- 10) ответ – **12**.

Решение (2 способ, подстановка – вычисления по формулам «с конца»):

- п. 1-6 выполняются так же, как и при первом способе; главная задача – получить рекуррентную формулу:
если N не делится на 3: $K_N = K_{N-1}$
если N делится на 3: $K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$
с начальными условиями $K_1 = K_2 = 1$
- начинаем с заданного конечного числа 20; применяем первую формулу ($K_N = K_{N-1}$), пока не дойдем до числа, делящегося на 3 (это 18):
 $K_{20} = K_{19} = K_{18}$
- далее применяем вторую формулу ($K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$):
 $K_{20} = K_{18} = K_{17} + K_6$
- применяем первую формулу для 17:
 $K_{17} = K_{16} = K_{15} \Rightarrow K_{20} = K_{15} + K_6$
- применяем вторую формулу для обоих слагаемых:
 $K_{20} = (K_{14} + K_5) + (K_5 + K_2) = K_{14} + 2K_5 + 1$
где учтено, что $K_2 = 1$
- с помощью первой формулы переходим в правой части к числам, делящимся на 3:
 $K_{20} = K_{12} + 2K_3 + 1$
а затем применяем вторую формулу для каждого слагаемого
 $K_{20} = (K_{11} + K_4) + 2(K_2 + K_1) + 1 = K_{11} + K_4 + 2(1+1) + 1 = K_{11} + K_4 + 5$
- снова используем первую формулу
 $K_{20} = K_9 + K_3 + 5$
а затем – вторую:
 $K_{20} = (K_8 + K_3) + (K_2 + K_1) + 5 = K_8 + 2(K_2 + K_1) + 5 = K_8 + 9$
- и еще раз
 $K_{20} = K_6 + 9 = K_5 + K_2 + 9 = K_5 + 10 = K_3 + 10 = 2 + 10 = 12$
- ответ – **12**.

Решение (3 способ, О.В. Щецова, лицей № 6, г. Дубна):

- будем составлять таблицу из трех столбцов: в первом записывается получаемое число от 1 до 20, во втором – какой последней командой может быть получено это число, а в третьем вычисляем количество различных программ для получения этого числа из 1
- очевидно, что число 1 может быть получено с помощью одной единственной (пустой) программы:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1

- число 2 не делится на 3, поэтому его можно получить только командой сложения (+1), значит, количество программ для 2 совпадает с количеством программ для 1:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	= 1

- число 3 делится на 3, поэтому его можно получить с помощью двух команд: +1 (из 2) и *3 (из 1):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2

- 5) числа 4 и 5 не делятся на 3, поэтому их можно получить только с помощью команды +1, а число 6 может быть получено двумя командами:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	$1 + 1 = 2$
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	$2 + 1 = 3$

- 6) следующая группа – 7, 8 (не делятся на 3) и 9 (делится на 3):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	$1 + 1 = 2$
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	$2 + 1 = 3$
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	$3 + 2 = 5$

- 7) далее – 10, 11 и 12:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	$1 + 1 = 2$
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	$2 + 1 = 3$
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	$3 + 2 = 5$
10	+1	5
11	+1	5
12	+1 *3	$5 + 2 = 7$

- 8) и так далее, вот полностью заполненная таблица (до конечного числа 20):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	$1 + 1 = 2$
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	$2 + 1 = 3$
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	$3 + 2 = 5$
10	+1	5
11	+1	5
12	+1 *3	$5 + 2 = 7$
13	+1	7
14	+1	7
15	+1 *3	$7 + 2 = 9$
16	+1	9
17	+1	9
18	+1 *3	$9 + 3 = 12$
19	+1	12
20	+1	12

- 9) ответ – количество программ, с помощью которых можно получить число 20 из 1, – считываем из последней ячейки третьего столбца
 10) ответ – **12**.

Решение (4 способ, М.В. Кузнецова и её ученики, г. Новокузнецк):

- 1) пусть N – искомое конечное число, $K(N)$ количества программ получения числа N
- 2) тогда для построения рекуррентной формулы определения $K(N)$, нужно знать 2 факта:
 - а) какой может быть последняя команда и сколько есть видов этого последнего действия?
 - б) для каждого «последнего» действия нужно знать число программ получения предыдущего числа, сумма этих количеств и есть искомое значение $K(N)$ – число программ получения числа N .

Например, общее количество программ получения числа 6 с помощью Утроителя равно $K(6) = K(5) + K(2)$, т.к. есть ДВА способа завершения программ получения этого значения: $6=5+1$ и $6=2 \cdot 3$.

- 3) число программ получения числа N зависит от числа программ получения предыдущего значения, и что программы получения чисел, кратных 3-м могут завершаться 2-мя способами: $(N-1)+1$ или $(N/3) \cdot 3$, а все остальные числа получают только первым способом: $(N-1)+1$.
- 4) составим рекуррентную формулу для определения числа программ получения числа N :
 при $N = 1$ имеем $K(1) = 1$
 если N не кратно 3: $K(N) = K(N-1)$
 если N делится на 3: $K(N) = K(N-1) + K(N/3)$
- 5) с помощью это формулы заполняем таблицу следующим образом:
 - в первом столбце записываем все натуральные числа от 1 до заданного N ;
 - во втором столбце – числа, на единицу меньшие (из которых может быть получено N последней операцией сложения с 1);
 - в третьем столбце для чисел, кратных 3-м, записываем частное от деления числа, записанного в первом столбце, на 3 (из этого числа может быть получено N последней операцией умножения на 3);
 - в последнем столбце вычисляем $K(N)$, складывая соответствующие значения для тех строк, номера которых записаны во втором и третьем столбцах:

N	N-1	N/3	K(N)
1	–		1
2	1		1
3	2	1	1+1=2
4	3		2
5	4		2
6	5	2	2+1=3
7	6		3
8	7		3
9	8	3	3+2=5
10	9		5
11	10		5
12	11	4	5+2=7
13	12		7
14	13		7
15	14	5	7+2=9
16	15		9
17	16		9

18	17	6	$9+3 = 12$
19	18		12
20	19		12

6) ответ – **12**.

Возможные проблемы:

- неверно определенные начальные условия
- неверно выведенная рекуррентная формула
- ошибки при заполнении таблицы (невнимательность)
- второй способ (подстановка), как правило, приводит к большему количеству вычислений; конечно, можно отдельно выписывать все полученные ранее значения K_N , но тогда мы фактически придем к табличному методу

За что снимают баллы:

- за то, что нет обоснования полученного результата (хотя получен правильный ответ)
- за то, что нет строгого доказательства того, что найдены все возможные программы; например, снимут 1 балл, если просто перечислить все возможные программы или построить полное дерево возможных программ, но без доказательства
- за арифметические ошибки

Задачи для тренировки¹:

- 1) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16? Ответ обоснуйте.

- 2) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 55? Ответ обоснуйте.

- 3) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18? Ответ обоснуйте.

- 4) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 17? Ответ обоснуйте.

- 5) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 25? Ответ обоснуйте.

- 6) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 12? Ответ обоснуйте.

- 7) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15? Ответ обоснуйте.

- 8) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15? Ответ обоснуйте.

- 9) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18? Ответ обоснуйте.

- 10) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

¹ Источники заданий:

1. Демонстрационный вариант ЕГЭ 2012 гг.
2. Проверочные работы МИОО.

- 2. прибавь 2
- 3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 13? Ответ обоснуйте.

- 11) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 32? Ответ обоснуйте.

- 12) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 2
- 2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 24? Ответ обоснуйте.

- 13) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 49? Ответ обоснуйте.

- 14) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 3
- 2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 27? Ответ обоснуйте.

- 15) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. прибавь 3
- 3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 3 преобразуют в число 15? Ответ обоснуйте.

- 16) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. умножь на 2
- 3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 38? Ответ обоснуйте.

- 17) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. прибавь 3
- 3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 19? Ответ обоснуйте.

- 18) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

- 1. прибавь 1
- 2. умножь на 2
- 3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 27? Ответ обоснуйте.